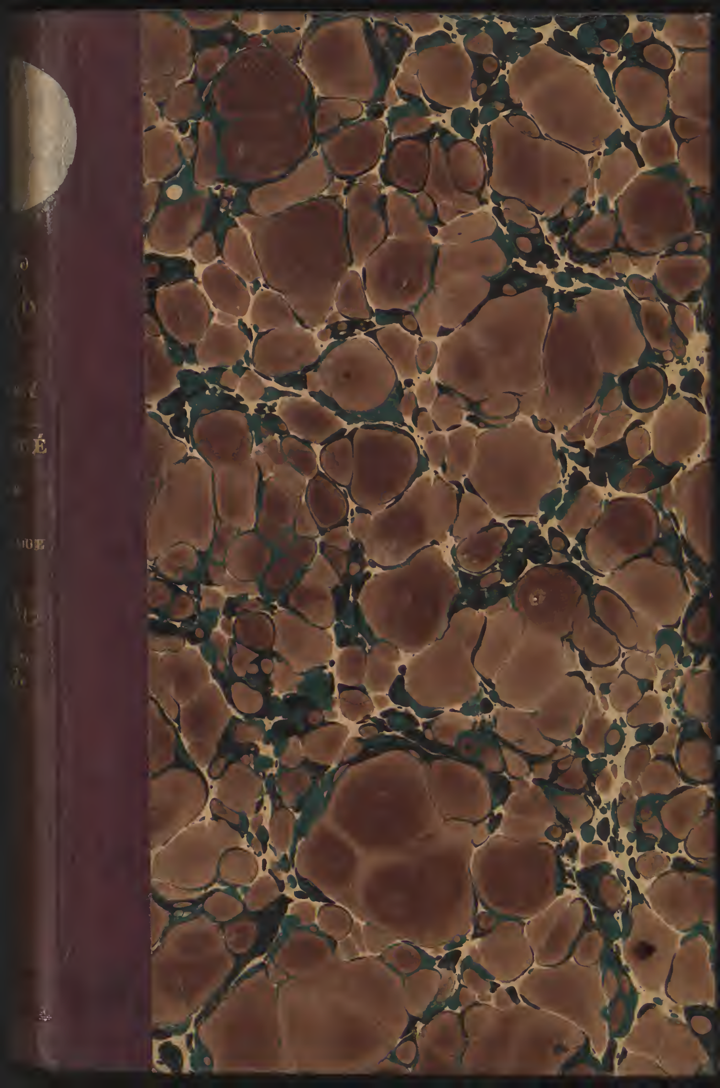



REALE ACCADEMIA DELLE SCIENZE DI TORINO
A. VIII. 55



TRAITÉ

DE STATIQUE,

PAR J.-B. LABEY,

Docteur ès-Sciences de l'Université Impériale, Instituteur à l'École Impériale Polytechnique, Examinateur des Aspirans à la même École, et Professeur de Mathématiques transcendantes au Lycée Napoléon; ancien Professeur de Mathématiques à l'École Royale Militaire de Paris, des Ingénieurs Constructeurs de la Marine; de l'École des Élèves d'Artillerie; Membre de plusieurs Sociétés savantes, etc., etc.

A PARIS,

Chez BACHELIER, Libraire, quai des Augustins, n° 55.

1812.



DE L'IMPRIMERIE DE Mme Ve COURCIER.

A

MONSIEUR LAPLACE,

Comte de l'Empire, Chancelier du Sénat-Conservateur, Grand-Officier de la Légion d'Honneur, Membre de l'Institut et du Bureau des Longitudes de France; des Sociétés Royales de Londres et de Gottingue; des Académies des Sciences de Russie, de Danemarck, de Suède, d'Italie, etc.

Hommage d'attachement, de respect et de reconnaissance,

. . . LABEY.

AVERTISSEMENT.

Les matériaux qui ont servi à la composition de ce Traité, étaient rassemblés depuis long-tems. Il ne s'agissait plus que de choisir ceux qui paraîtraient les plus propres à remplir mes vues, et de les disposer dans un ordre convenable, pour en former un ouvrage qui pût être publié avec quelque apparence d'utilité. Ce dernier travail était aussi terminé depuis plusieurs années; mais des raisons particulières ne m'ayant pas permis alors d'en faire part au public, je l'avais réservé pour mon usage particulier, afin d'y avoir recours au besoin dans l'exercice de mes fonctions. J'étais loin de vouloir changer de résolution, craignant, surtout, qu'on ne m'accusât d'augmenter sans nécessité le grand nombre de livres élémentaires, qui depuis quelque tems se succèdent les uns aux autres avec tant de rapidité. Cependant

plusieurs Professeurs, dont je respecte les lumières, ayant pris connaissance de mon manuscrit, m'ont paru persuadés que sa publication pourrait être utile aux jeunes gens dont l'instruction dans cette partie des Mathématiques, leur était confiée. Ils m'ont vivement pressé, et même à plusieurs reprises, de le faire connaître par la voie de l'impression. J'ai cru devoir à la fin céder à leurs instances réitérées : j'avoue qu'il ne fallait pas un motif moins puissant pour me faire prendre une détermination à laquelle je répugnais naturellement. Ainsi, si l'Ouvrage que je donne aujourd'hui au public obtient, comme ils me l'ont fait espérer, quelque succès, c'est à leurs avis et à leur amitié que je le devrai. Ils voudront bien me permettre d'en consigner ici d'avance les témoignages de ma sincère reconnaissance.

TABLE DES MATIÈRES.

FIN DE LA TABLE.

TRAITÉ

DE STATIQUE.

INTRODUCTION.

Définitions et Notions préliminaires.

LA Mécanique est la science de l'équilibre et du mouvement. Le mot *mécanique* vient du grec μηχανη qui signifie machine; ce qui fait croire que dans son origine cette science devait se borner à la connaissance, même assez imparfaite, des machines; mais elle présente aujourd'hui un champ beaucoup plus vaste, et on sait combien son domaine s'est agrandi par les nombreux travaux des savans géomètres qui ont illustré les siècles derniers, et de ceux qui font encore l'honneur de celui-ci.

Ce qu'on entend par *corps* en Mécanique est une substance étendue, impénétrable, au moins dans ses parties constituantes, et susceptible de recevoir toute espèce de forme et de mouvement. On va voir tout à l'heure ce qu'on doit entendre par mouvement.

L'existence d'un corps ne peut être séparée de celle du *lieu* qu'il occupe, c'est-à-dire, de la portion de l'espace avec laquelle il coïncide.

Deux corps ne peuvent occuper en même tems un même lieu; et c'est en cela que consiste l'*impénétrabilité* de la matière.

Tout corps est *solide* ou *fluide*.

Le corps solide est celui dont les parties constituantes sont tellement liées entr'elles, qu'elles ne peuvent être séparées sans un effort plus ou moins sensible. Telles sont les différentes espèces de bois, de métaux, etc.

Le corps fluide est celui dont les parties cèdent facilement à leur séparation; elles n'ont point par conséquent, ou du moins elles n'ont que très-peu d'adhérence entr'elles: tels sont l'air, l'eau, les gaz, etc.

Le *mouvement* consiste dans le passage successif d'un lieu en un autre. Ainsi il y a mouvement dans un corps, lorsque la totalité ou

quelques-unes de ses parties occupent successivement différens points de l'espace.

L'état de *repos* est opposé à celui de mouvement.

Un corps est en repos, lorsque chacune de ses parties reste dans un même lieu. On juge qu'un corps est en repos, lorsqu'il ne change pas de situation à l'égard d'un *système* ou assemblage d'autres corps, supposés fixes ou immobiles dans l'espace. Par exemple, imaginez trois plans rectangulaires, qui passent par un point fixe et déterminé; une molécule, tant qu'elle conserve la même distance respective à chacun de ces trois plans, reste en repos. Mais si le système est en mouvement, et que cependant la molécule conserve toujours à son égard la même situation, elle n'est plus en repos que relativement au système; car il est évident qu'elle ne peut rester dans la même position à son égard, sans occuper successivement différens points de l'espace absolu. Ceci nous donne l'occasion de distinguer deux sortes de mouvement, et de repos, et même de lieu. L'un est absolu et l'autre relatif. Supposez, par exemple, un homme assis tranquillement dans une voiture ou dans un bateau en mouvement, il est clair qu'il est en repos et dans le même lieu à l'égard de la voiture ou

du bateau; cependant il est mu dans l'espace; et change de lieu continuellement à l'égard des objets extérieurs, qui en sont indépendans.

Le mouvement, eu égard seulement à la direction du mobile, est *rectiligne* ou *curviligne*, selon qu'il se fait en ligne droite ou en ligne courbe. Celui qui se fait tantôt en ligne droite, tantôt en ligne courbe, peut s'appeler *mixtiligne*.

Le mouvement considéré par rapport à la manière dont l'espace est parcouru, est *uniforme* ou *varié*. Le mouvement est uniforme, si le mobile dans des tems égaux pris à volonté parcourt des espaces égaux. Alors on appelle *vîtesse* l'espace parcouru dans l'unité de tems qu'on s'est choisie, et qui est ordinairement la seconde.

La vîtesse suppose, comme on voit, un espace réellement parcouru, ou qui du moins peut être parcouru d'un mouvement uniforme.

Le mouvement est varié, lorsque le mobile dans des tems égaux parcourt des espaces inégaux. Il peut l'être d'une infinité de manières; dans ce cas, l'espace parcouru pendant l'unité de tems n'est plus propre à exprimer la vîtesse du mobile.

On entend par *force* ou *puissance* tout ce qui meut ou tend à mouvoir un corps. Ainsi l'effet

d'une force appliquée à un point mobile est de lui donner du mouvement, s'il n'est pas arrêté par quelque obstacle.

L'*équilibre* est l'état d'un corps sollicité au mouvement par plusieurs forces qui se détruisent mutuellement. On voit par là que l'idée de l'équilibre suppose la coexistence de plusieurs forces dont les effets se contrebalancent ou s'anéantissent; ce que ne suppose pas essentiellement l'idée de repos.

Le mouvement considéré par rapport à la cause qui le produit, est *simple* ou *composé*, selon qu'il est l'effet d'une force unique ou de la combinaison de plusieurs forces.

DE LA DIVISION DE LA MÉCANIQUE.

La Mécanique, prise dans l'acception la plus générale, comprend deux parties principales, la *Mécanique*, proprement dite, et l'*Hydraulique*.

La première considère les corps solides; la seconde les corps fluides.

Chacune de ces parties principales se sous-divise en deux autres.

Ainsi la *Mécanique*, proprement dite, comprend:

La *Statique* [1], qui a pour objet l'équilibre La *Dynamique* [2], qui a pour objet le mouvement	des corps solides.

L'*Hydraulique* [3] comprend de même deux parties :

L'*Hydro-statique*, qui a pour objet l'équilibre L'*Hydro-dynamique*, qui a pour objet le mouvement	des corps fluides.

---

(1) Στατικη signifie en grec l'art de peser.

(2) Ce mot vient du grec δυναμις qui signifie *puissance*.

(3) *Hydraulique* vient du mot grec υδραυλος, *eau sonnante*, formé de ὑδωρ *eau* et de αυλος, flûte; parce que chez les anciens l'Hydraulique n'était que la science qui enseignait à construire des jeux d'orgue, et qu'on se servait au lieu de soufflets, d'une chute d'eau pour y faire entrer le vent et les faire sonner.

CHAPITRE PREMIER.

Principes de Statique.

La Statique, comme on l'a vu dans l'Introduction, a pour objet l'équilibre des corps solides. On peut tirer sa dénomination du latin *stare*, qui signifie *s'arrêter*, *être en repos*, parce qu'en effet l'équilibre produit le repos, quoiqu'il y ait dans un corps en équilibre une tendance au mouvement.

Les *forces* ou *puissances*, car ces deux termes sont synonimes, étant capables d'augmentation et de diminution, peuvent être exprimées, comme tout ce qui est quantité, par des nombres ou par des lignes droites. Ces dernières ont l'avantage de pouvoir représenter à la fois les grandeurs et les directions des forces.

1.

Deux forces appliquées à un point mobile et dont les directions coïncident, doivent s'ajouter; c'est-à-dire que le point sur lequel elles agissent, est dans le même cas que s'il était

sollicité au mouvement suivant la même direction par une force unique égale à leur somme. Si deux forces dont les directions coïncident doivent s'ajouter, il est clair que la même chose aura lieu pour un plus grand nombre de forces.

II.

Un mobile ne peut aller par deux routes différentes en même tems.

III.

Deux forces égales et directement opposées qui agissent sur une même molécule, se font équilibre, puisqu'il n'y a pas de raison pour que l'une l'emporte sur l'autre, et que d'ailleurs la molécule ne pourrait obéir à l'une et à l'autre sans aller par deux chemins à la fois.

IV.

Si deux forces directement opposées qui sollicitent un point mobile au mouvement sont inégales, ce point tendra à se mouvoir, et sera mu réellement, s'il est libre, comme s'il était sollicité par une force unique, égale à l'excès de la plus grande sur la plus petite, et qui agirait dans le sens de la plus grande.

V.

En général, quel que soit le nombre de forces qui agissent sur un point mobile, si leurs directions coïncident, ce point sera dans le même cas que s'il était sollicité par deux forces, dont l'une serait égale à la somme des forces qui agissent dans un sens, et l'autre égale à la somme des forces qui agissent en sens contraire; et par conséquent, le mobile pourra encore être considéré comme soumis à l'action d'une force unique, égale à la différence de ces deux dernières sommes.

VI.

Quel que soit le nombre, et quelles que soient les directions de plusieurs forces qui sollicitent un point mobile au mouvement, comme ce mobile ne peut suivre qu'une route à la fois, il existe toujours une force unique en vertu de laquelle le point serait mu, ou tendrait à se mouvoir de la même manière qu'avec le concours de toutes les autres. Cette force unique est dite la *Résultante* des autres forces qui, par rapport à elle, prennent le nom de *Composantes*.

VII.

L'équilibre a lieu entre plusieurs forces, lorsque l'une d'elles est égale et directement opposée à la résultante de toutes les autres, ou, plus généralement, lorsque la résultante de quelques-unes de ces forces est égale et directement opposée à la résultante des autres.

Il suit de ce principe, que toutes les fois que l'on connaît la résultante d'un système de forces, il suffit pour empêcher le mouvement, de lui opposer directement une force égale, ou de placer sur sa direction un obstacle capable de résister à son action.

VIII.

Réciproquement, si l'équilibre a lieu entre plusieurs forces, l'une d'elles prise à volonté, doit être égale et directement opposée à la résultante de toutes les autres; ou, plus généralement, la résultante de quelques-unes de ces forces prises arbitrairement, est égale et directement opposée à la résultante des autres.

IX.

Lorsque les molécules, ou parties constituantes d'un corps sont liées invariablement

les unes aux autres, on peut prendre pour point d'application d'une force tel point de sa direction qu'on voudra. Car le point auquel la force est appliquée, ne peut se mouvoir sans entraîner dans le même sens tous les points contigus qui se trouvent sur la direction de cette force.

X.

Lorsque des forces agissent sur un point mobile, et que deux ou plusieurs d'entr'elles se font équilibre, l'état de ce point, quant au mouvement, est le même que s'il était sollicité seulement par les forces restantes, car l'effet des premières étant nul, il n'en peut résulter aucun changement dans celui que doivent produire les autres indépendamment des forces détruites.

PROPOSITION I.

1. *Deux forces soit égales, soit inégales, dont les directions, prolongées s'il est nécessaire, concourent en un point, ont une résultante qui ne peut être nulle; et la direction de cette résultante est toute entière dans le plan des deux composantes.*

Soient deux forces P et Q (fig. 1), dont les

directions concourent au point A, en formant l'angle arbitraire PAQ.

1°. Si les forces P et Q avaient une résultante nulle, elles se feraient équilibre; mais si elles se fesaient équilibre, en ajoutant une troisième force P′ égale et directement opposée à la force P, le point mobile A obéirait à l'action de la force P′ (x), et serait mu suivant AP′. D'ailleurs les forces P et P′ étant égales et directement opposées, doivent se faire équilibre; le point mobile A devrait donc aussi obéir à l'action de la force Q et se mouvoir suivant AQ. Le point A serait donc mu en même tems suivant AP′ et suivant AQ; ce qui est impossible. Donc *la résultante des deux forces* P *et* Q, *dont les directions concourent au point* A *en fesant un angle quelconque* PAQ, *ne peut pas être nulle.*

2°. La direction de la résultante doit se trouver toute entière dans le plan des deux composantes P et Q; car si elle pouvait être située hors du plan, n'importe de quel côté, comme il y a nécessairement de l'autre côté une ligne semblablement dirigée, il faudrait, tout étant égal de part et d'autre, que le point mobile pût prendre à la fois deux routes différentes; ce qui est absurde.

Il est visible aussi que deux forces égales ont une résultante qui partage également l'angle que forment leurs directions; car, tout étant égal de part et d'autre, la raison qu'on donnerait pour prouver qu'elle doit plus s'approcher de la direction d'une des composantes, pourrait servir à prouver qu'elle doit aussi s'approcher davantage de la direction de l'autre; d'où s'ensuivrait encore cette conséquence absurde, qu'un mobile pourrait se mouvoir en même tems suivant deux directions différentes.

Ainsi deux forces égales P et Q (fig. 2) ont une résultante R dirigée suivant la droite AR, qui divise l'angle PAQ en deux parties égales; car quoique son prolongement AR′ soit situé de même symétriquement par rapport aux droites AP, AQ; cependant on ne peut pas supposer que la résultante soit dirigée et agisse suivant AR′. En effet, si par le point de concours A, on imagine une perpendiculaire MN à la droite RR′, les deux composantes P et Q tendant ici chacune en particulier, à abaisser de la même manière le point mobile A au-dessous de MN, il serait absurde de supposer que l'action combinée de ces mêmes composantes tendît à l'élever au-dessus de MN suivant AR′.

On verra de même facilement que si les com-

posantes P et Q sont inégales, leur résultante R sera dirigée suivant une droite située dans l'angle formé par leurs directions. [J'indiquerai par (P, Q) cet angle, et en général une notation telle que celle-ci : (Y, Z) représentera dans l'occasion l'angle que forment à leur point de concours les droites, ou les puissances désignées par Y et par Z.] Car si on supposait que la force Q agît seule sur une molécule placée en A, il est clair que cette molécule serait mue suivant AQ; mais la force P ne peut que rapprocher de sa direction celle de la résultante R. Donc si on prolonge AQ vers Q′, la résultante R ne peut tomber au-delà de QQ′ vers P′; par la même raison si on prolonge AP vers P′, on prouvera que la résultante ne peut tomber au-delà de PP′ vers Q′. Donc *elle sera dirigée dans l'angle* (P, Q) *formé par les directions des composantes*.

Au reste il est inutile d'avertir que ce cas comprend celui où les composantes seraient égales.

PROPOSITION II.

2. *Quelles que soient la grandeur et la position de la résultante de deux forces, si on augmente ou si on diminue l'une de ces dernières, la*

nouvelle résultante formera un plus petit angle que la première avec la direction de la composante qui aura été augmentée, ou un plus grand angle avec la direction de celle qui aura été diminuée.

Car supposons (fig. 3) que la résultante R des forces P et Q soit dirigée suivant AR; quelle que soit sa grandeur, il est évident qu'on pourra la substituer aux deux composantes P et Q; mais si on augmente une de ces dernières, la force Q, par exemple, d'une quantité q, alors les forces R et q deviennent composantes à leur tour, et leur résultante R′ sera une force dirigée dans l'angle (R, Q). Donc *si on augmente une des composantes, la nouvelle résultante formera un plus petit angle que la première avec la direction de la force augmentée.*

La seconde partie de la proposition est une suite nécessaire de la première.

PROPOSITION III.

3. *La résultante de deux forces quelconques, dont les directions concourent en un point, est représentée tant pour sa direction que pour sa grandeur, par la diagonale d'un parallélogramme construit sur les deux droites qui, partant du point de concours, expriment les directions et les grandeurs de ces forces.*

1°. Je dis que *la résultante est dirigée suivant la diagonale.* Il n'y a point de doute pour le cas où les deux forces sont égales. Supposons à présent qu'une des forces Q ou AC soit double de la force P ou AB (fig. 4). Si on partage la force AC en deux autres AD, DC égales chacune à la force AB, la résultante des deux forces AB et AD sera donc dirigée suivant la diagonale AE du losange BADE : or, d'après ce qui a été dit ci-dessus (1x), on pourra la supposer appliquée à l'extrémité E de cette diagonale, et la remplacer par les deux forces qui l'ont produite, dont l'une, par conséquent, sera dirigée suivant BF, et l'autre suivant EG ; et comme cette dernière peut être appliquée en D, elle se combinera avec son égale DC ; d'où résultera une nouvelle force dirigée suivant la diagonale DF du second losange EDCF. Les deux forces primitives P et Q peuvent donc être remplacées par deux autres, l'une dirigée suivant EF, et l'autre suivant DF. La résultante de celles-ci passe par le point F, qui est commun à leurs directions. D'ailleurs la résultante des premières passe par le point A. Donc enfin *la résultante des forces* P *et* Q *est dirigée suivant la diagonale du parallélogramme* BACF.

Un semblable procédé fait voir que si la force Q est

Q est égale à 3P, la résultante sera de même dirigée suivant la diagonale du parallélogramme, dont les côtés représentent les grandeurs et les directions de ces forces. Il suffit, pour s'en convaincre, de jeter un coup d'œil sur la figure 5, dans laquelle AF représente la direction de la résultante des forces AB = P, et AC = 2P, et CH la résultante des forces égales CF et CG.

La même démonstration a évidemment lieu pour les cas où Q = 4P, et par suite = 5P, = 6P...., et en général = *m*P. Donc si les forces sont dans le rapport de 1 : *m*, ou de *m* : 1, leur résultante sera dirigée suivant la diagonale du parallélogramme construit selon les règles qui viennent d'être prescrites. Mais cette construction et le raisonnement précédent font voir aussi que si la résultante est dirigée suivant la diagonale, lorsque les forces sont dans le rapport de *m* : 1, la même proposition est encore vraie, lorsqu'elles seront dans le rapport de *m*:2, de *m*:3, de *m*:4, et en général dans le rapport de *m* : *n*. Donc toutes les fois que les forces sont commensurables, leur résultante est dirigée suivant la diagonale du parallélogramme construit comme nous venons de le dire.

Il est inutile de rappeler que dans toutes ces démonstrations, il faut supposer les points d'applica-

tion liés entr'eux d'une manière fixe et invariable. On se souviendra de cette remarque pour la suite.

Passons au cas où les forces seraient incommensurables. Nous les représenterons par les droites AB, AC (fig. 6), et je dis que leur résultante sera dirigée suivant la diagonale AD du parallélogramme ABDC. Car supposons qu'elle fût dirigée suivant AB' dans l'angle BAD, de manière à rencontrer le côté BD en un point éloigné de D d'une quantité finie B'D. Par le point B' je mène la parallèle B' A' à la base DC. J'imagine ensuite le côté AB divisé en un nombre assez grand de parties égales, pour que l'une d'elles soit plus petite que la quantité finie $CA' = DB'$; il est clair que si on porte ces parties égales sur l'autre côté AC, une des divisions au moins tombera entre A' et C en un point quelconque E; on aura donc une force $Q' = AE$ plus grande que AA', et plus petite que AC, laquelle sera commensurable avec la force P. Ainsi la résultante R' de P et de Q' sera dirigée suivant la diagonale AF du parallélogramme construit sur les deux côtés AB, AE; mais la force Q étant $> Q'$, doit faire avec la résultante R de P et de Q un angle plus petit qu'avec R' (2), et au contraire dans notre hypothèse elle formerait un angle plus grand.

La supposition que nous avons faite est donc absurde.

On prouvera par un raisonnement et par une opération analogue que la résultante R ne peut pas être dirigée dans l'angle DAC; elle est donc dirigée suivant la diagonale AD.

2°. *La résultante de deux forces qui concourent en un point est représentée en grandeur par la diagonale du parallélogramme construit sur les droites qui expriment ces forces.*

Car, quelle que soit la résultante R (fig. 7), si on lui oppose en sens contraire une force égale R′, le système des trois forces P, Q, R′ sera en équilibre (VII); mais lorsqu'un système de forces est en équilibre, une quelconque d'entr'elles peut être regardée comme égale et directement opposée à la résultante des deux autres (VIII). Ainsi dans le cas présent la force Q représentée par AC pourra être regardée comme égale et directement opposée à la résultante des forces P et R′; et par conséquent, si on prolonge CA d'une quantité AC′ = AC, on aura une force Q′ = Q qui sera la résultante de P, dont la grandeur et la position sont données, et de R′ dont la direction seulement est connue. Pour trouver la grandeur de celle-ci, je joins B et C′ par une droite; je mène parallèlement à

AB la droite C′D′ jusqu'à ce qu'elle rencontre le prolongement de DA en D′; et je dis que le prolongement AD′ représente R′. En effet, si on prenait pour R′ une quantité $AG < AD'$, en achevant le parallélogramme, la résultante Q′ de P et de R′ serait dirigée suivant la diagonale AH; elle ne serait donc plus directement opposée à la force Q; ce qui ne peut pas être. Par une raison semblable, on prouvera que R′ ne peut pas être plus grande que AD′. Donc $R' = AD'$; mais à cause des parallélogrammes ABCD′, ADBC′, $AD' = BC' = AD$. Donc $R = AD$. Donc 2°. etc.

La proposition que nous venons de démontrer est connue sous le nom de *Principe du parallélogramme des forces*. Elle est de la plus grande importance en Statique, et d'un usage très-étendu, comme on sera à portée d'en juger à mesure que nous avancerons.

Remarque. On voit par les questions mécaniques d'Aristote, que ce principe était connu de son tems; la démonstration qu'il en donne est entièrement conforme à celle qu'on trouve dans beaucoup de traités publiés après lui. Daniel Bernoulli paraît avoir donné le premier une démonstration rigoureuse de ce principe, fondée seulement sur l'Algèbre et sur la Géo-

métrie ; mais on ne peut disconvenir qu'elle ne soit longue et un peu compliquée. On en trouve une autre un peu plus simple de Dalembert dans ses Opuscules mathématiques. Celle qui a été publiée dans les Mémoires de philosophie et de mathématiques de la Société de Turin, années 1760 et 1761, par M. le chevalier Daviet de Foncenex, est élégante et ingénieuse. Elle présente une heureuse application des propriétés des séries récurrentes. Enfin ceux à qui le calcul infinitésimal est familier, liront avec intérêt celle que M. Laplace a mise à la tête de sa *Mécanique céleste*.

On peut juger par ce seul exposé, de l'importance que les plus grands géomètres ont attachée à une démonstration rigoureuse de cette proposition. J'ai donné la préférence à celle qu'on vient de lire, parce qu'à cause de sa simplicité elle paraît mieux convenir à un traité élémentaire, tel que celui-ci. La première idée en est due à M. Duchayla, professeur distingué et recommandable par ses connaissances en mathématiques.

4. *Corollaire I.* Il suit de la proposition qui vient d'être démontrée, qu'à deux forces concourantes en un point, on peut substituer une

force unique représentée par la diagonale d'un parallélogramme construit sur les directions et avec les grandeurs des deux composantes, et que réciproquement on peut remplacer une force par deux autres, en les représentant par les côtés contigus d'un parallélogramme dont la diagonale exprimerait la grandeur et la direction de la force proposée ; et comme rien n'empêche de décomposer chacune de ces dernières en deux autres, et de continuer indéfiniment une semblable décomposition, on voit combien on peut multiplier le nombre des forces composantes propres à produire le même effet qu'une force donnée.

5. *Corollaire II.* Les deux composantes P, Q et leur résultante R (fig. 7) étant représentées respectivement par les droites AB, AC, AD, ou AB, BD, AD, il s'ensuit qu'elles sont entre elles comme les trois côtés du triangle ABD; mais ces trois côtés sont entr'eux comme les sinus des angles qui leur sont opposés. Donc on aura

$$P : Q : R :: \sin ADB : \sin BAD : \sin ABD,$$

ou, en faisant les substitutions convenables, et adoptant la notation que j'ai proposée ci-devant,

$$P : Q : R :: \sin(Q, R) : \sin(P, R) : \sin(P, Q).$$

Donc, si on veut comparer entr'elles deux quelconques de ces trois forces, on voit qu'elles sont proportionnelles aux sinus des angles compris entre les directions des deux autres, ou en raison inverse des perpendiculaires abaissées sur leurs directions d'un point pris sur la direction de la troisième; de sorte que si on désigne par p et par q les perpendiculaires abaissées d'un point de la résultante sur les directions des composantes P et Q, on aura

$$P : Q :: q : p, \quad \text{ou} \quad Pp = Qq.$$

Ces lignes p et q étant égales ou proportionnelles aux sinus des angles.

6. *Corollaire III.* L'équilibre n'ayant lieu entre trois forces qu'autant que l'une d'elles est égale et directement opposée à la résultante des deux autres (VIII), et d'ailleurs le sinus d'un angle étant égal à celui de son supplément, on en conclut que si trois forces qui agissent sur un point mobile se font équilibre, elles sont entr'elles chacune comme le sinus des angles que forment les directions des autres; ensorte que dans le cas d'équilibre entre les trois forces P, Q et R′, on a

$$P : Q : R' :: \sin(Q, R') : \sin(P, R') : \sin(P, Q);$$

mais cette suite de quantités proportionnelles ne suffit pas pour l'équilibre.

7. Si on veut appliquer le calcul aux questions relatives à la composition et à la décomposition des forces qui concourent en un point, il est clair que leur solution dépend des principes de la Trigonométrie plane, puisque les grandeurs et les directions de deux composantes et de leur résultante sont données par les côtés et les angles d'un triangle rectiligne. La valeur R de la résultante des forces P et Q, aura pour expression :

$$R = \sqrt{[P^2 + Q^2 + PQ. \cos(P, Q)]}.$$

PROPOSITION IV.

8. *Si trois forces dont les directions concourent en un point sont représentées par les trois arêtes contiguës d'un parallélepipède; leur résultante le sera par la diagonale menée du point de concours au sommet de l'angle opposé.*

Soient les trois forces P, Q, S représentées par les trois arêtes contiguës AB, AC, AE (fig. 8); on pourra d'abord substituer aux deux forces P et Q leur résultante représentée par la diagonale AD du parallélogramme ABDC (4); mais si par AD et par AE on fait passer un

plan, sa section avec le parallélogramme EFHG sera une droite EH égale et parallèle à AD. Donc EADH est un parallélogramme et la résultante des forces AD, AE sera exprimée par la diagonale AH de ce parallélogramme, laquelle est en même tems la diagonale du parallélepipède. Donc *si trois forces dont les directions concourent* etc.

La valeur de la résultante des trois forces AB, AC, AE sera exprimée par

$$R=\sqrt{[P^2+Q^2+S^2+2PQ.\cos(P,Q)+2PS\cos(P,S)+2QS\cos(Q,S)]}.$$

9. Cette proposition, par analogie avec la précédente, pourrait s'appeler le *Principe du parallélepipède des forces*. Elle nous fait voir comment une force donnée peut être décomposée en trois autres, et réciproquement comment on peut substituer une force unique à trois forces appliquées au même point.

PROPOSITION V.

10. *Deux forces parallèles appliquées aux extrémités d'une droite inflexible, ont pour résultante une force qui est égale à leur somme et qui leur est parallèle. De plus, cette résultante divise la droite qui joint les points d'application*

des composantes en deux parties réciproquement proportionnelles à ces forces.

1°. Soient les deux forces parallèles P et Q (fig. 9) appliquées l'une en A, l'autre en B, et représentées par les droites AG, BH. Pour trouver leur résultante, je prends sur AB une partie AM = K d'une grandeur arbitraire, et je construis le parallélogramme ACGM. De même à partir du point B, je prends sur AB, et en sens contraire de AM, la partie BM' = AM = K, et je construis le parallélogramme BDHM'. Cela posé, je puis substituer à la force P les deux forces AC, AM; et à la force Q les deux forces BD et BM'; mais les deux forces AM et BM' étant égales et agissant en sens contraire sur une même droite, se détruisent. La résultante des deux forces P et Q sera donc la même (x) que celle des deux forces AC et BD, ou de leurs égales IN, IO, appliquées au point de rencontre I de leurs directions. Sur IN et sur IO je construis les parallélogrammes IENS, IE'OT, dont les côtés IE, IE' soient sur une même ligne parallèle à AB; et les autres IS, IT sur une ligne parallèle aux directions des forces proposées. Je substitue à la force IN les deux forces IS, IE, et à la force IO, les deux IT, IE'; mais à cause de l'égalité des

triangles ACG, INS, on a

$$IE = CG = K; \quad \text{et} \quad IS = AG = P.$$

De même, à cause de l'égalité des triangles BHD, ITO, on a

$$IE' = HD = K, \quad \text{et} \quad IT = BH = Q;$$

or IE, IE' se détruisent comme égales et directement opposées. Restent donc les deux forces IS, IT, dont les directions coïncident, et qui, par conséquent, doivent s'ajouter (1). Donc 1° *la résultante R des deux forces P et Q est égale à leur somme, et sa direction est parallèle à celle des composantes.*

2°. Les triangles semblables CAG, AIF donnent la proportion :

AG : CG :: IF : AF, ou P : K :: IF : AF.

Par la même raison les triangles semblables DBH, BIF donnent cette autre proportion :

K : Q :: BF : IF,

d'où l'on tire, en les multipliant par ordre :

P : Q :: BF : AF.

Ce qui fait voir, 2° *que la droite qui joint les points d'application de deux forces parallèles, est divisée par leur résultante en parties qui leur sont réciproquement proportionnelles.*

Cette conséquence est indépendante de la position de la droite qui joint les points d'application. Donc, si on désigne par p et par q les distances AF, BF de ces points à celui par où passe la résultante; on aura les deux équations:

$$R = P + Q, \quad Pp = Qq.$$

De la proportion $P : Q :: q : p$, on tire

$$P+Q : P : Q :: p+q : q : p, \quad \text{ou} \quad R : P : Q :: AB : BF : AF;$$

ce qui nous apprend que *la résultante et les deux composantes peuvent être représentées chacune respectivement par la partie de la droite comprise entre les points d'application des deux autres.*

Concluons de là, et de l'équation $R=P+Q$, qu'une force quelconque R peut être remplacée par deux autres P et Q parallèles à la première, pourvu que la somme de celles-ci soit égale à la proposée, et qu'elles soient de plus, réciproquement comme les distances de leurs points d'application à celui de leur résultante R.

11. Nous avons supposé que les deux forces parallèles P et Q agissaient dans le même sens; supposons à présent qu'elles agissent en sens contraire. Soit $P > Q$, je remplace la première (fig. 10) par une force $Q' = Q$ appliquée en B,

et une autre $R = P - Q$, appliquée au point F, déterminé par la proportion $R : Q :: AB : AF$, dans laquelle les trois premiers termes sont donnés ; mais Q détruit son égale Q′. Il ne reste donc plus que la force $R = P - Q$ pour la résultante des forces P et Q. Donc *la résultante de deux forces parallèles qui agissent en sens contraire, est égale à leur différence ; et passe au-delà de la plus grande par rapport à la plus petite.* Si on désigne par p et par q les distances de leurs points d'application à celui de leur résultante, on aura, comme auparavant,

$$P : Q :: q : p; \quad \text{ou} \quad Pp = Qq.$$

Donc en général on a

$$\left.\begin{array}{l} R = P \pm Q \\ Pp = Qq \end{array}\right\} \text{pour deux forces parallèles.}$$

On avait déjà pu remarquer (5) que pour deux forces dont les directions concourent en un point, on avait également $Pp = Qq$, p et q désignant les perpendiculaires abaissées d'un point de la résultante sur les composantes.

La considération de ces produits qui ont lieu dans les divers cas que nous avons traités, nous conduit naturellement à la théorie des momens.

CHAPITRE II.

Des Momens.

12. On entend ici par le *moment* d'une force, le produit qui résulte de la multiplication de sa grandeur par la distance d'un point fixe à sa direction. On verra dans la suite ce que ce mot peut encore signifier.

Nous venons de dire (11) que si d'un point pris sur la direction de la résultante de deux forces on abaisse une perpendiculaire sur chacune des directions de celles-ci, on obtient deux produits égaux en multipliant chaque force respectivement par la perpendiculaire abaissée sur sa direction; ce qui a donné, pour ce cas, un moment égal pour chacune des forces. On trouve de même que si d'un point pris sur la direction d'une des composantes, on abaisse des perpendiculaires sur les directions de la résultante et de l'autre composante, les momens de ces dernières forces sont égaux entr'eux. Il s'agit d'étendre ces considérations en prenant à volonté un point quelconque situé dans le plan des forces composantes.

Ce point est connu sous le nom de *centre des momens*. Nous supposerons d'abord les forces parallèles, parce qu'il est facile d'en conclure ce qui doit avoir lieu lorsqu'elles ont des directions quelconques.

PROPOSITION VI.

13. *Le moment de la résultante de deux forces parallèles est égal à la somme ou à la différence des momens de ces forces.*

Supposons 1° que les deux composantes P′, P″ agissent dans le même sens, et que par conséquent leur résultante $R = P' + P''$; et plaçons d'abord le centre des momens en C (fig. 11) hors de l'espace compris entre les parallèles; enfin désignons par x, x', x'' les distances du point C aux directions des forces R, P′, P″, et par p, q les intervalles compris entre les points d'application des composantes et celui de leur résultante. Cela posé, puisque

$$R = P' + P'',$$

on aura aussi

$$Rx = P'x + P''x,$$

Mais on a pour x ces deux valeurs

$$1^\circ \quad x = x' + p, \qquad 2^\circ \quad x = x'' - q;$$

donc si on multiplie P′ par la première valeur, et P″ par la seconde, il viendra

$$Rx = P'x' + P'p + P''x'' - P''q.$$

Mais

$$(10)\quad P'p - P''q = 0;$$

donc

$$(a)\quad Rx = P'x' + P''x''.$$

Si nous transportons ensuite le centre des momens au point C′ entre les directions des forces P′ et R, il est évident que la première valeur de x deviendra $p - x$, la seconde conservant pour ses deux termes le même signe qu'auparavant. Ainsi on aura pour ces deux valeurs

$$1^\circ\ x = p - x', \qquad 2^\circ\ x = x'' - q$$

d'où l'on conclura, après avoir fait les substitutions et les réductions.

$$(b)\quad Rx = P''x'' - P'x'.$$

Si on eût placé le centre des momens au point C″ entre les directions des forces R et P″, il est clair qu'on aurait eu alors pour les deux valeurs de x

$$1^\circ\ x = x' - p, \qquad 2^\circ\ x = q - x'',$$

ce

ce qui aurait donné pour le moment de la résultante

$$(c) \quad Rx = P'x' - P''x''.$$

Enfin on retrouvera la première équation (a), si on transporte le centre des momens au-delà de P″.

Supposons 2° que les forces parallèles agissent en sens opposé, et conservons les mêmes dénominations que ci-dessus, nous aurons (fig. 12)

$$R = P' - P''$$

P′ étant supposée $> P''$ et

$$Rx = P'x - P''x.$$

Dans ce cas la résultante R passe au-delà de la plus grande des composantes à l'égard de la plus petite (11): si donc on prend le centre C des momens hors de l'espace compris entre les directions des trois forces, on aura

$$1^\circ.\ x = x' - p, \qquad 2^\circ.\ x' = x'' - q.$$

Par conséquent, si on multiplie P′ par la première valeur, et P″ par la seconde, et qu'on efface les termes qui se détruisent, il viendra

$$(a') \quad Rx = P'x' - P''x''.$$

Si le centre des momens est placé en C′ entre

les directions de R et de P′, les valeurs de x seront

$$1^\circ.\ x = p - x', \quad 2^\circ.\ x = q - x'';$$

et conséquemment Rx devient

$$(b')\quad Rx = P''x'' - P'x'.$$

Transportons enfin le centre des momens en C″ entre les directions des composantes P′, P″, à cause des valeurs suivantes de x :

$$1^\circ.\ x = p + x', \quad 2^\circ.\ x = q - x'',$$

on trouvera

$$(c')\quad Rx = P'x' + P''x'';$$

et si on transportait plus loin au-delà de P″ le centre des momens, on retrouverait l'équation (a').

14. *Corollaire.* Si dans les différens cas que nous venons de parcourir, et dont nous avons déduit les six équations (a), (b), (c); (a'), (b'), (c'), on considère les points où les puissances sont appliquées, comme les extrémités de lignes solides et inflexibles assujéties à tourner autour du centre des momens, on voit que chacune d'elles tend à produire autour de ce point un mouvement de rotation ; d'où l'on conclut que *le moment de la résultante de deux forces paral-*

lèles est égal à la somme des momens des composantes, lorsque celles-ci tendent à faire tourner dans le même sens leurs points d'application, et que dans le cas contraire, *le moment de la résultante est égal à la différence des momens des composantes;* savoir, *au moment de la composante qui tend à produire un mouvement de rotation dans le même sens que la résultante, moins le moment de celle qui en produirait un en sens opposé.*

Les mêmes équations nous apprennent que les momens de signe semblable annoncent des mouvemens de rotation dans le même sens autour du centre des momens, et les momens de signe différent des mouvemens de rotation en sens contraire.

15. Il suit de ce qui précède, qu'en donnant aux quantités R, P′, P″; x, x', x'' les signes qui leur conviennent, on pourra représenter par les équations suivantes, les circonstances relatives à la valeur et au moment de la résultante de deux forces parallèles :

$$R = P' + P'', \qquad Rx = P'x' + P''x''.$$

Le cas où les deux composantes seraient égales et agiraient en sens contraire, sans être directement opposées, aurait peut-être besoin de quelques éclaircissemens qu'on trouvera dans la suite.

PROPOSITION VII.

16. En général, *quel que soit le nombre de forces parallèles dirigées dans un même plan*, 1°. *la résultante est égale à la somme algébrique de ces forces*; c'est-à-dire, *à la somme des forces qui agissent dans le même sens que la résultante, moins la somme de celles qui agissent en sens contraire*. 2°. *Le moment de la résultante de ces forces est de même égal à la somme algébrique des momens des composantes*, c'est-à-dire, *à la somme des momens des forces, qui par leur position et leur direction donnent des produits de même signe que le moment de la résultante, moins la somme des momens des autres forces qui donnent des résultats de signe contraire aux premiers*.

C'est une suite nécessaire de ce qui vient d'être exposé. Car 1°. puisque pour deux forces P', P'', dont la résultante serait R', on a (15) $R' = P' + P''$; si on combine R' avec une troisième force P''', on rentre dans le cas de deux forces, et par conséquent, en désignant par R'' la résultante de R' et de P''', on en conclura $R'' = R' + P'''$, ou en substituant pour R' sa valeur $R'' = P' + P'' + P'''$. Par la même raison,

pour quatre forces on trouvera,

$$R''' = P' + P'' + P''' + P^{IV};$$

ainsi de suite pour un plus grand nombre de forces; d'où il faut conclure 1°. *que pour un système quelconque de forces parallèles situées dans un même plan, leur résultante* R *est égale à la somme des composantes qui agissent dans le même sens que la résultante moins la somme de celles qui agissent en sens opposé.*

Remarquez que cette première partie de la proposition est encore vraie pour un système de forces parallèles dirigées dans des plans différens; car pour arriver au résultat, il suffit de combiner successivement deux forces parallèles qui sont toujours situées dans un même plan.

2°. Puisque pour deux forces parallèles on a (15), $R'r' = P'x' + P''x''$, $R'r'$ exprimant ici le moment de la résultante des deux forces P', P''; si on combine une troisième force P''' avec R', et qu'on représente le moment de ces deux dernières par $R''r''$, on rentre dans le cas où l'on n'avait que deux forces à considérer, et par conséquent on a, $R''r'' = R'r' + P'''x'''$, ou en mettant à la place de $R'r'$ sa valeur; $R''r'' = P'x' + P''x'' + P'''x'''$. En continuant le même pro-

cédé, jusqu'à ce qu'on soit arrivé à la dernière composante, on verra facilement que le moment de la résultante de toutes les forces se compose de la somme des momens des composantes, chacun de ces produits étant affecté du signe qui lui convient, et qui, comme on sait, est dépendant de celui de ses facteurs. Donc 2°. *le moment de la résultante d'un système de forces parallèles est égal etc.*

17. *Corollaire.* Nous avons observé ci-dessus (14), que les momens affectés de signes positifs annonçaient un mouvement de rotation dans le même sens autour du centre des momens, et les momens affectés de signes négatifs un mouvement de rotation en sens opposé. Nous sommes donc en droit de conclure que quel que soit le nombre de forces parallèles dirigées dans un même plan, *le moment de la résultante est égal à la somme des momens des forces qui tendent à donner un mouvement de rotation autour du centre des momens dans le même sens que la résultante, moins la somme des momens de celles qui tendent à produire un mouvement de rotation en sens contraire.*

18. *Remarque I.* Il ne faut pas perdre de vue qu'on trouve le véritable signe de chacun des

momens, si en regardant comme positives les forces qui agissent dans un sens, et les distances prises d'un même côté du centre des momens, on regarde comme négatives les forces qui agissent dans un sens opposé et les distances prises de l'autre côté. Au reste, on ne fait en cela que se conformer à l'esprit du calcul algébrique, qui prescrit de prendre avec des signes différens, les quantités qui ont des directions ou des situations contraires.

19. *Remarque II.* On a dû remarquer aussi que les distances r, r', r'', etc. x, x', x'', etc. qui entrent dans l'expression des momens, n'étaient pas uniquement celles du centre des momens aux points d'application, mais en général celles des directions des puissances à une parallèle menée par le centre des momens : la droite ainsi menée s'appelle *axe* des momens. Ainsi ce que nous venons de démontrer à l'égard d'un point, s'applique à toute droite menée parallèlement aux directions des puissances.

20. *Corollaire.* Au lieu de prendre les momens par rapport à un axe MN, parallèle aux directions des forces P', P'', P''', etc. (fig. 13), on peut les prendre à l'égard de tout autre axe

M′N′ fesant avec le premier un angle quelconque a; car si on multiplie par cos a les deux membres de l'équation $Rx = P'x' + P''x'' + P'''x''' +$ etc. relative au premier axe, il viendra

$$Rx \cos a = P'x' \cos a + P''x'' \cos a + P'''x''' \cos a + \text{etc.}$$

Or, il est évident que $x' \cos a$, $x'' \cos a$, $x''' \cos a$, etc. expriment les valeurs des perpendiculaires abaissées des points d'application A, B, E, etc. sur le nouvel axe M′N′. Donc etc. Mais alors les points d'application sont censés pris sur une même droite CE.

Au lieu des perpendiculaires on pourrait prendre des droites inclinées de la même manière sur les axes; car il est évident que celles-ci seraient proportionnelles aux premières.

PROPOSITION VIII.

21. *Quelle que soit la direction de plusieurs forces composantes situées dans un même plan; si d'un point pris dans ce plan, on abaisse des perpendiculaires sur leurs directions et sur celle de la résultante, le moment de cette résultante est encore égal à la somme algébrique des momens des forces composantes*, c'est-à-dire, *à la somme de ces momens pris avec les signes qui leur conviennent.*

Soient, comme à l'ordinaire, R la résultante et P′, P″, P‴, etc. ses composantes, j'imagine (fig. 14) par le centre C des momens deux axes rectangulaires entr'eux, l'un Cx, que j'appellerai *l'axe des* x, et l'autre Cy, que j'appellerai *l'axe des* y. Je prolonge les directions des forces jusqu'à ce qu'elles rencontrent l'un des axes, celui des y, par exemple, en des points dont je représente les distances au centre C des momens par y, y', y'', y''', etc.; en prenant (IX) ces points pour les points d'application des forces, je décompose chacune d'elles en deux autres parallèles aux deux axes, savoir, R en Y et X, P′ en Y′ et X′, P″ en Y″ et X″, etc. Les composantes Y, Y′, Y″, etc. seront situées dans l'axe même des y, et les autres X, X′, X″, etc. seront perpendiculaires au même axe. Soit donc M le point où la résultante R rencontre l'axe des y; à partir de ce point, je prends la droite MV pour la représenter, et je la décompose par le moyen du rectangle MTVS (5) en deux, l'une MT dirigée suivant l'axe des y, et l'autre $MS = X$ parallèle à l'axe des x: enfin pour avoir l'expression du moment de la résultante R j'abaisse sur sa direction prolongée une perpendiculaire CP, que je désigne par p. Cela posé, j'observe que les deux triangles sembla-

bles MTV, CMP donnent la proportion

$$MV : TV :: CM : CP,$$

ou $$R : X :: y : p;$$

Donc $Rp = Xy$.

Une semblable décomposition donnera pour P', P'', P''',

$$P'p' = X'y', \quad P''p'' = X''y'', \quad P'''p''' = X'''y''', \ldots$$

p', p'', p''', etc. étant les perpendiculaires abaissées du centre des momens sur les directions des forces P', P'', P''', etc.; mais (16)

$$Xy = X'y' + X''y'' + X'''y''' + \text{etc.}$$

Donc aussi

$$Rp = P'p' + P''p'' + P'''p''' + \text{etc.};$$

ce qui démontre la proposition énoncée.

22. *Corollaire.* Nous avons vu (17) que l'équation $Xy = X'y' + X''y'' + \text{etc.}$ prouve que le moment de la résultante X des forces X', X'', X''', etc. est égal à la somme des momens de celles de ses composantes, qui tendent à donner un mouvement de rotation autour du centre C dans le même sens, moins la somme des momens de celles qui tendent à donner un mouvement de rotation en sens opposé; d'où il s'ensuit que R tendant à faire tourner dans le même sens que X;

P′ dans le même sens que X′, ainsi des autres; *le moment de la résultante* R *est aussi égal à la somme des momens de celles de ses composantes* P′, P″, P‴, *etc. qui tendent à donner un mouvement de rotation dans le même sens, moins la somme des momens de celles qui tendent à donner un mouvement de rotation en sens contraire.*

Remarque. La démonstration précédente suppose tacitement que l'un des deux axes au moins peut être rencontré par les directions de toutes les composantes, supposition qu'on peut toujours faire, lorsque le nombre des forces est fini, puisque la position des axes est arbitraire; mais quand même on multiplierait suffisamment le nombre des forces en fesant varier en même tems leurs directions, pour qu'aucun axe ne pût jamais être rencontré à la fois par toutes les composantes, ce qui arriverait, par exemple, si on supposait appliquées à tous les points de la circonférence d'une courbe fermée, des forces dirigées suivant la tangente à chacun des points, rien n'empêcherait néanmoins de concevoir d'abord un axe placé de la manière la plus favorable pour être rencontré par le plus grand nombre de forces possible, et de donner ensuite à l'axe une autre situation pour être rencontré par les autres forces et par la première résultante.

Il est évident qu'on pourra suivre le procédé que nous venons d'exposer pour trouver le moment de la résultante de toutes les forces; d'où l'on conclura que dans tous les cas *le moment de la résultante est égal à la somme des momens des forces qui, etc.*

23. Au reste, quel que soit le point d'application de la puissance, pris sur sa direction, son moment ne change point de valeur. En effet, soit M′ le point où l'une des puissances P′ est supposée appliquée (fig. 15), et désignons par m', n' les coordonnées de ce point. Après avoir fait, comme auparavant, la décomposition de cette puissance, on aura, à cause des triangles semblables MNM′, M′T′V′, la proportion:

$$MN:NM'::M'T':T'V', \text{ ou } n'-y':m'::Y':X',$$

d'où $X'n'-Y'm'=X'y'=P'p'$. Donc etc.

24. *Scholie.* Les propositions précédentes fournissent un moyen facile de trouver sur le champ la valeur du moment de la résultante d'un système de forces dirigées comme on voudra, dans un même plan; car, comme il est toujours possible de juger à la simple inspection dans quel sens chacune des forces tend à donner un mouvement de rotation autour

d'un point fixe, il ne s'agit que de faire une somme des momens de celles des composantes qui tendent à donner un mouvement de rotation dans un sens, et une somme de celles des composantes qui tendent à donner un mouvement de rotation en sens contraire; la différence de ces sommes sera égale au moment de la résultante.

A l'aide de ce qui a été démontré jusqu'ici, on est en état de déterminer la valeur et la position de la résultante d'un système de forces appliquées au même point, ou à différens points liés entr'eux d'une manière invariable, et d'assigner dans les mêmes circonstances les conditions de l'équilibre. C'est ce que nous nous proposons de faire dans les articles suivans. Nous supposerons d'abord que toutes les forces concourent en un même point, ensuite qu'elles sont appliquées à différens points situés ou non situés dans le même plan.

ARTICLE I.

Cas où les forces concourent en un même point.

25. Nous avons vu (I et V) que si 1°. les directions des forces coïncident, leur résultante est égale à leur somme; ainsi en désignant par

P', P'', P''', etc., les composantes, et par R leur résultante, on aura pour valeur de celle-ci :

$$R = P' + P'' + P''' + \text{etc.},$$

et pour l'équilibre

$$R = o.$$

2°. Si les composantes sont situées dans un même plan et dirigées d'une manière quelconque, on pourra trouver la valeur et la position de la résultante, de deux manières.

Première manière. *Par la composition des forces.*

A partir du point de concours, on prendra sur les directions de deux composantes quelconques P' et P'', par exemple, deux droites pour les représenter; on en fera les côtés d'un parallélogramme, dont la diagonale représentera la résultante R' (4). On composera de même R' avec une troisième composante P''' en construisant un parallélogramme sur leurs directions, et la diagonale de ce dernier parallélogramme exprimera la valeur et la direction de la résultante R'' de R' et P''', ou de P', P'' et P'''. En continuant le même procédé jusqu'à ce qu'on soit arrivé à la résultante finale, on aura la grandeur et la position de la résultante R de toutes les composantes P', P'', P''', etc.

Deuxième manière. *Par la décomposition des forces.*

J'imagine par un point quelconque C du plan des forces (fig. 16) deux axes rectangulaires Cx, Cy, et je décompose chacune d'elles en deux autres parallèles à ces axes, que j'appelle, l'une l'*axe des* x, et l'autre l'*axe des* y. Par exemple, soit la force P' représentée par MN, elle donnera les composantes X', Y' l'une dans le sens des x, et l'autre dans le sens des y. Par la même raison, les forces P'', P''' donneront les composantes X'', Y''; X''', Y''', etc.; et si on décompose d'une manière semblable la résultante R, elle donnera les deux composantes X, Y, parallèlement aux mêmes axes. Ainsi on aura (I et V) les deux équations :

$$X = X' + X'' + X''' + \text{etc.},$$
$$Y = Y' + Y'' + Y''' + \text{etc.},$$

d'où l'on tirera, en fesant attention que la résultante R est représentée par la diagonale du rectangle construit sur X et sur Y,

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2}.$$

Quant à sa direction, elle sera donnée par l'équation de la droite dirigée suivant la diagonale, c'est-à-dire, par l'équation

$$y - y' = \frac{Y}{X}(x - x')$$

les coordonnées étant comptées du point C; et x', y' exprimant en particulier les coordonnées du point de concours M de toutes les composantes; car il est évident que $\frac{Y}{X}$ est la valeur de la tangente trigonométrique de l'angle que fait la direction de la résultante R avec l'axe des x. D'ailleurs les signes de X et de Y suffisent pour faire connaître dans quel sens la résultante agit.

Si l'origine des coordonnées était placée au point de concours des forces composantes, les coordonnées x', y' seraient nulles, et l'équation de la droite qui exprime la direction de la résultante, deviendrait

$$y = \frac{Y}{X}x;$$

ou, si l'on veut,

$$Xy = Yx.$$

L'équilibre aura lieu, si on a

$$R = 0;$$

ou

$$X = 0, \quad Y = 0.$$

Ces deux dernières équations doivent être satisfaites

satisfaites en même temps, car les directions des forces X et Y formant entr'elles un angle, il est impossible (1) que leur résultante soit nulle, à moins que chacune ne le soit séparément.

3°. Si les composantes sont dirigées d'une manière quelconque dans l'espace, on pourra encore trouver la valeur de la résultante de deux manières.

Première manière. *Par la composition des forces.*

Le procédé à suivre est le même que pour les forces dirigées dans un même plan.

26. Deuxième manière. *Par la décomposition des forces.*

On imaginera trois axes rectangulaires entre eux passant par un point C pris à volonté dans l'espace (fig. 17). Soient Cx, Cy, Cz ces axes. L'axe Cx sera l'axe des x; l'axe Cy celui des y, et l'axe Cz celui des z. On désignera les plans coordonnés par les axes qu'ils comprennent. Ainsi le plan qui comprend l'axe des x et celui des y sera nommé le plan des x et des y; le plan qui comprend l'axe des x et celui des z sera le plan des x et des z; et enfin le plan qui comprend l'axe des y et celui des z sera le plan des y et des z. Nous continuerons

de représenter par P', P'', P''', P^{iv}, etc. les diverses puissances du système, et par R leur résultante. Cela posé, on décomposera chacune de ces puissances (9) en trois autres parallèles aux trois axes rectangulaires; et en nommant X', Y', Z'; X'', Y'', Z'', X''', Y''', Z''', etc. les forces particulières, qui proviennent de la décomposition, on aura pour composantes parallèlement à l'axe

$$\text{des} \begin{cases} x, & X' + X'' + X''' + \text{etc.} \\ y, & Y' + Y'' + Y''' + \text{etc.} \\ z, & Z' + Z'' + Z''' + \text{etc.} \end{cases}$$

Mais les puissances dont les directions coïncident s'ajoutent (1); ainsi en désignant par X, Y, Z chacune des résultantes partielles, on trouvera :

$$X = X' + X'' + X''' + X^{\text{iv}} + \text{etc.}$$
$$Y = Y' + Y'' + Y''' + Y^{\text{iv}} + \text{etc.}$$
$$Z = Z' + Z'' + Z''' + Z^{\text{iv}} + \text{etc.}$$

La résultante totale R de ces trois résultantes partielles est représentée (8) par la diagonale du parallélepipède rectangle construit sur les trois côtés X, Y, Z. Sa valeur sera donc

$$R = \sqrt{(X^2 + Y^2 + Z^2)}.$$

Pour connaître sa direction dans l'espace,

il suffit de chercher la projection de la diagonale sur deux des plans coordonnés; car en imaginant par ces projections des plans perpendiculaires à ceux dans lesquels elles se trouvent, leur commune intersection donnera la direction demandée. Or, en désignant par x', y', z' les coordonnées du point d'application, on aura, pour exprimer les projections de la résultante sur les plans coordonnés, les trois équations suivantes : savoir, sur le plan

$$\text{des}\left\{\begin{matrix} x, y \\ x, z \\ y, z \end{matrix}\right\}\text{l'équation}\left\{\begin{matrix} y - y' = a(x - x') \\ z - z' = b(x - x') \\ a(z - z') = b(y - y') \end{matrix}\right\}.$$

La troisième équation se conclut des précédentes, en éliminant $(x - x')$. Ainsi deux de ces équations comportent la troisième.

On sait que a et b expriment les tangentes des angles que la projection de la résultante fait avec l'axe des x sur le plan des x et des y, et sur celui des x et des z. Cherchons donc leur valeur. Si MR (fig. 18) exprime la grandeur et la direction de la résultante, et si sur cette droite comme diagonale, on construit un parallélepipède rectangle, dont les arêtes contiguës au point de concours M, soient parallèles aux trois axes rectangulaires qui passent par l'origine des coor-

données, il est évident que MP, MQ, MS expriment les résultantes partielles que nous avons désignées par X, Y, Z. MG sera la projection de la résultante sur le plan PMQ parallèle à celui des x et des y; et par conséquent la tangente de l'angle que fait la projection de la résultante sur le plan des x et des y avec l'axe des x, aura pour expression $\frac{Y}{X}$. Par la même raison la tangente que fait la projection de la résultante sur le plan des x et des z avec le même axe, sera exprimée par $\frac{Z}{X}$. Donc, si on substitue à a et à b leurs valeurs, on aura pour les équations des projections :

$$(1)\quad X(y-y') = Y(x-x');$$
$$(2)\quad X(z-z') = Z(x-x');$$
$$(3)\quad Z(y-y') = Y(z-z').$$

Remarquez que les signes respectifs de X, Y et Z feront connaître dans quel sens agit la résultante.

Ces équations auraient été plus simples, si on eût placé l'origine des coordonnées au point de concours M, parce qu'alors les coordonnées x', y', z' auraient été égales à zéro.

L'équilibre aura lieu entre toutes les puissances

P', P'', P''', P^{iv}, etc., si leur résultante est nulle. Ainsi la condition de l'équilibre peut être exprimée par la seule équation $R = 0$, ou par ces trois :

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = 0.$$

Il est nécessaire que ces trois équations soient satisfaites à la fois, par la même raison que nous avons donnée ci-dessus (25). Réciproquement, si elles ont lieu en même tems, il y aura nécessairement équilibre, parce qu'alors la résultante $R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$ est nulle.

Si l'une des résultantes partielles, par exemple, $Z = 0$, les autres X et Y conservant une valeur finie quelconque, la résultante R est dirigée dans un plan parallèle à celui des x et des y; et si deux des équations précédentes ont lieu à la fois; si, par exemple, $X = 0$ et $Y = 0$, Z ayant une valeur finie, c'est une preuve que la résultante est parallèle à l'axe des Z.

27. Ici se présente l'occasion de donner la valeur analytique des puissances P', P'', P''' calculée par le moyen des angles qu'elles font avec les axes coordonnés. Pour cela, je représenterai par α', $6'$, γ'; α'', $6''$, γ''; α''', $6'''$, γ''', etc., les angles de P', P'', P''', avec l'axe des x, l'axe

des y et celui des z; et je réserverai les lettres α, β, γ sans accent pour représenter les angles correspondans que fait la résultante avec les mêmes axes.

Cela posé, si les puissances sont dans un même plan, dans celui des x et des y, par exemple, ou dans un autre plan parallèle à celui-ci; on aura

$$X' = P' \cos \alpha',$$

et, parce qu'ici β' est le complément de α',

$$Y' = P' \sin \alpha'.$$

Par la même raison;

$$X'' = P'' \cos \alpha'', \quad Y'' = P'' \sin \alpha'';$$
$$Y''' = P''' \cos \alpha''', \quad Y''' = P''' \sin \alpha'''.$$

....

On aura semblablement

$$X = R \cos \alpha, \quad Y = R \sin \alpha.$$

Si on élève au quarré les deux membres de ces dernières équations, et qu'on les ajoute, il viendra

$$X^2 + Y^2 = R^2 (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = R^2,$$

à cause de $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$; d'où l'on tire

pour la valeur de R,

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2}$$

comme auparavant.

Pour connaître les directions des puissances $X, X', X'', X'''\ldots$; $Y, Y', Y'', Y'''\ldots$, il faudra avoir soin de prendre les cosinus et les sinus qui entrent dans leurs expressions, avec les signes qui leur conviennent, conformément aux règles du Calcul trigonométrique.

Si les puissances sont dirigées d'une manière quelconque dans l'espace, on trouvera

$$X' = P' \cos \alpha', Y' = P' \cos \beta', Z' = P' \cos \gamma';$$
$$X'' = P'' \cos \alpha'', Y'' = P'' \cos \beta'', Z'' = P'' \cos \gamma'';$$
$$X''' = P''' \cos \alpha'''; Y''' = P''' \cos \beta'''; Z''' = P''' \cos \gamma''';$$
....
$$X = P \cos \alpha, Y = P \cos \beta, Z = P \cos \gamma.$$

En ajoutant les quarrés de X, Y et Z on aura

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = R^2 (\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma) = R^2.$$

ou

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2},$$

comme nous le savions d'avance.

L'équation $\cos \alpha^2 + \cos \beta^2 + \cos \gamma^2 = 1$ exprime une propriété connue dans l'application

de l'Algèbre à la Géométrie ; mais sans y recourir expressément, on peut la trouver immédiatement et sans calcul, par le moyen de la figure 18, qui représente un parallélepipède rectangle ; car si on fait MR égal au rayon des tables, ou $=1$, on a évidemment $1=\overline{MS}^2+\overline{MG}^2$; ou $1=\overline{MS}^2+\overline{MQ}^2+\overline{MP}^2$; mais alors $MS=\cos\gamma$; $MQ=\cos\beta$, et $MP=\cos\alpha$. Donc..... $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$.

La même figure sert aussi à démontrer, en regardant toujours MR comme représentant le rayon des tables, que $X=R\cos\alpha$; $y=R\cos\beta$, et $Z=R\cos\gamma$.

28. *Remarque*. Pour trouver sans peine quel signe on doit attribuer aux forces X, Y, Z ; X′, Y′, Z′ ; X″, Y″, Z″... qui proviennent de la décomposition des puissances R, P′, P″, P‴... on fixera d'avance et à volonté la direction des forces qu'on regarde comme positives ; il est évident que celles qui seront dirigées en sens opposé seront négatives ; ainsi, par exemple, si on veut que les forces, qui tirent dans le sens des z soient positives, lorsqu'elles tendent à élever au-dessus du plan des x et des y les points auxquels elles sont appliquées ; celles au contraire

qui tendent à les abaisser au-dessous, seront négatives. On fera une semblable distinction à l'égard des forces perpendiculaires aux autres plans.

Nous avons supposé, et nous supposerons constamment dans la suite, que toutes les puissances tirent suivant leurs directions, les points auxquels elles sont appliquées. S'il s'en trouve qui agissent autrement, on les remplacera par d'autres forces égales capables de produire le même effet en tirant le point d'application.

La manière dont on vient d'envisager les choses, nous met aussi à portée de déterminer facilement les signes qu'on doit donner aux cosinus qui entrent dans l'expression analytique des forces; car si, après s'être représenté l'espace partagé en huit cases égales par l'intersection mutuelle des trois axes rectangulaires, on convient de donner des signes positifs aux coordonnées, x, y, z des points renfermés dans une de ces cases prises à volonté, on pourra pour se guider, eu égard aux diverses directions des puissances, faire varier le signe des cosinus des angles exprimés par la lettre α, comme le signe des x; le signe du cosinus des angles exprimés par la lettre β, comme celui des y, et enfin le signe du cosinus des

angles exprimés par la lettre γ, comme celui des z; ensorte, par exemple, que si une des puissances est dirigée dans la case pour laquelle les coordonnées sont $-x$, $+y$, $-z$; il faudra donner à $\cos\alpha$ le signe $-$, à $\cos 6$ le signe $+$ et à $\cos\gamma$ le signe $-$. On pourra ainsi connaître par la nature seule des signes qui affectent $\cos\alpha$, $\cos 6$, $\cos\gamma$, la direction de la résultante R; c'est-à-dire, dans quel sens elle agit; comme on peut la déterminer par la seule considération des signes de X, Y, Z, sans recourir aux angles expressément.

ARTICLE II.

Cas où les forces sont appliquées à différens points situés ou non situés dans un même plan.

Les forces peuvent être parallèles, ou avoir des directions quelconques.

Supposons d'abord qu'elles soient parallèles et situées dans un même plan.

29. 1°. Nous avons vu (10) que pour deux forces parallèles, on avait les deux équations

$$R = P' + P'', \quad P'p = P''q,$$

ou en désignant par a la distance des points

d'application des forces P' et P'', cette troisième $Rp = P''a$, ou enfin

$$(P' + P'')\,p = P''a.$$

Voyons quelles sont les valeurs et les positions de p relatives à celles de P' et de P''. Tant que les grandeurs P' et P'' auront le même signe, il est clair que p sera plus petit que a. C'est le cas où la résultante passe entre les composantes P' et P''.

Si P' et P'' ont des signes différens ; la valeur de $p = \frac{P''a}{P'+P''}$, est négative tant que P' est plus grande que P'' ; ce qui indique que la résultante R et P' sont du même côté de P'', et que R en est plus éloignée que P'. Si au contraire P' est plus petite que P'', la valeur de p devient positive et plus grande que a ; ce qui nous apprend que P'' et R sont du même côté de P' et que R en est plus éloignée que P''.

Ces résultats s'accordent parfaitement, comme cela doit être, avec ce que nous avons vu et démontré précédemment (11), lorsqu'il était question de trouver la valeur et la position de la résultante de deux forces parallèles dirigées en sens contraire. Mais si P' est égal à P'', que doit-il arriver? J'observe d'abord que les deux équa-

tions $R = P' - P''$; $\frac{p}{q} = \frac{P''}{P'}$, ainsi que la troisième $p = \frac{P''a}{P' - P''}$, qui conviennent à ce cas (11), doivent avoir lieu quelque petite que soit la différence entre P' et P''; il n'y a point de difficulté pour la première. Quant à la seconde, j'observe que a étant ici la différence de p et de q, si π exprime celle de P' et de P'', on peut la mettre sous cette forme $\frac{p}{p+a} = \frac{P''}{P''+\pi}$; or à mesure que la valeur de π diminue, celle de $p = \frac{P''a}{P' - P''} = \frac{P''a}{\pi}$ augmente; de sorte que quand π devient $= 0$; $p = \frac{P''a}{0} = \infty$. Ainsi, dans l'équation $\frac{p}{p+a} = \frac{P''}{P''+\pi}$, l'unité est la limite du second membre $\frac{P''}{P''+\pi}$ ou $\frac{P''}{P'}$, et du premier $\frac{p}{p+a} = \frac{1}{1+\frac{a}{p}}$ ou $\frac{p}{q}$. Donc l'équation $\frac{p}{q} = \frac{P''}{P'}$ ou $P'p = P''q$ est encore vraie lorsque P' et P'' étant de signe contraire, on a $P' = P''$.

J'ai cru cette explication utile, parce que pour prouver (11) que la résultante de deux forces parallèles, qui agissent en sens contraire, est égale à leur différence, on a supposé que les deux composantes étaient inégales, et que d'ail-

leurs la vérité du théorème des momens (13) dépend de celle de l'égalité $P'p = P''q$.

La valeur $p = \frac{P''a}{\pi}$, fait voir que la distance à laquelle passe la résultante à l'égard des composantes est d'autant plus grande que leur différence est plus petite, et que cette distance n'admet point de limite; ensorte que si $P' = P''$ ou $\pi = 0$, cette distance, qui est alors exprimée par $\frac{P''a}{0}$ est infinie. Ainsi dans ce cas, il ne serait pas possible avec une force unique de faire équilibre aux deux composantes P' et P'', puisque, selon ce qu'indique le calcul, il faudrait placer une force nulle à une distance infinie; ce qui est impossible. Si on suppose ensuite $p'' > p'$, la distance devient finie et négative. Elle diminue à mesure que la différence entre P' et P'' devient plus grande. Ainsi la quantité $\frac{P''a}{0} = \infty$ indique le passage de la distance positive à la distance négative. C'est ainsi qu'en Trigonométrie la tangente d'un angle de positive devient négative, en passant par l'infini.

30. Il suit de ce qui vient d'être exposé, que si dans tous les cas d'équilibre, la résultante doit être nulle, on ne doit pas en conclure que

réciproquement si la résultante est nulle; il y a équilibre; car l'équilibre n'a lieu entre plusieurs forces, qu'autant qu'elles ne peuvent produire ni mouvement de translation, ni mouvement de rotation, et il faut pour cela, que la résultante devienne nulle par l'opposition directe de deux composantes égales. En effet, il est aisé de voir que si deux forces parallèles égales et agissant en sens contraire sont appliquées aux extrémités d'une droite inflexible (fig. 19), elles ne se font point équilibre, quoique leur résultante soit nulle; mais que si cette droite est libre, ou assujétie en un point C, autour duquel elle puisse tourner, elle tournera réellement jusqu'à ce que les directions de P' et de P'' coïncident. D'ailleurs, tant que les directions de ces forces ne coïncident pas, si on prend leurs momens par rapport à un point quelconque situé dans le plan, on aura toujours un résultat $= P'z$, z exprimant la partie de la droite comprise entre les directions des forces composantes.

31. La grandeur de la résultante R d'un système de forces parallèles ayant déjà été déterminée (16), il ne reste plus qu'à donner les moyens d'avoir sa position. Je supposerai les points d'application des puissances dans le plan

même des x et des y, et je représenterai par x', y'; x'', y''; x''', y''' ... x, y leurs coordonnées rectangulaires et celles de la résultante par rapport aux axes Cx, Cy (fig. 20).

Considérons d'abord les deux composantes P' et P'' et soit R' leur résultante. Les points d'application étant supposés en A, B, D, j'aurai (10 et 11) en prolongeant la droite BA jusqu'à sa rencontre S avec l'axe des y, ... $R'.DS = P'.AS + P''.BS$; ou, à cause des triangles semblables SAa, SDd, SBb, $R'r' = P'x' + P''x''$; r' désignant la coordonnée dans le sens des x du point d'application de R'. Combinons la première résultante R' avec une troisième composante P''' pour avoir une seconde résultante R'' dont la coordonnée dans le même sens soit r''; nous aurons $R''r'' = R'r' + P'''x'''$; ou..... $R''r'' = P'x' + P''x'' + P'''x'''$. Si on continue le même procédé, jusqu'à ce qu'on ait employé toutes les puissances du système, on trouvera pour résultat

$$1°.\ Rx = P'x' + P''x'' + P'''x''' + \text{etc.};$$

bien entendu qu'il faudra prendre chacun des momens avec le signe qui lui convient, conformément à ce qui a été prescrit (18). On trou-

verait pareillement

$$2°.\ Ry = P'y' + P''y'' + P'''y''' + \text{etc.}$$

Ces deux équations nous donnent

$$x = \frac{P'x' + P''x'' + P'''x''' + \text{etc.}}{R}$$

et

$$y = \frac{P'y' + P''y'' + P'''y''' + \text{etc.}}{R}$$

pour les coordonnées du point d'application de la résultante R.

Ces dernières expressions étant indépendantes de l'inclinaison des forces à l'égard des axes, nous apprennent que pour un système de forces parallèles dirigées comme on voudra dans un plan, il existe un point par où passe constamment la résultante de ces forces, pourvu que leurs points d'application restent les mêmes, et que ces puissances conservent leurs valeurs, ou du moins, que si elles viennent à en changer, les nouvelles valeurs soient proportionnelles aux premières.

En effet, il est clair que les valeurs de x et de y ne varieront pas si on multiplie haut et bas par un même nombre les quantités fractionnaires qui les expriment. Ce point remarquable est

est connu sous le nom de *centre de forces parallèles*. Nous verrons bientôt (39) qu'il existe un point analogue pour des forces parallèles situées dans différens plans, lorsque les mêmes conditions ont lieu.

Remarque. On peut cependant excepter le cas où le système se réduirait à deux forces égales, qui agiraient en sens contraire sans être directement opposées; car comme on trouve alors (29) une quantité infinie pour la distance à laquelle passe la résultante, il n'y a plus de centre de forces parallèles proprement dit.

32. Lorsqu'on a un système de forces parallèles situées dans un seul plan, ou même dans des plans différens, il est facile de s'assurer qu'il y a un centre de forces parallèles, ou un point par où passe constamment la résultante, par le procédé suivant : on joint d'abord les points d'application de deux composantes par une droite, qu'on divise en parties réciproquement proportionnelles à ces forces, pour avoir le point d'application de leur résultante R′ (10); on joint ensuite le point d'application de cette première résultante R′ avec celui d'une troisième composante, et on détermine de la même manière qu'auparavant le point d'application d'une seconde ré-

sultante R″. On continue la même opération jusqu'à ce qu'on ait trouvé le point d'application de la dernière résultante, ou de la résultante de toutes les composantes proposées. Si on vient ensuite à changer les directions des forces parallèles sans faire varier les points d'application, il est évident qu'en recommençant une opération semblable à la première, pour trouver les points d'application des résultantes partielles, on retombera successivement sur les mêmes points qu'auparavant. Ces points seront encore les mêmes, si on donne aux composantes des valeurs proportionnelles aux premières.

Il est bon d'observer que comme en général on n'a besoin que de connaître la direction d'une force, lorsque sa grandeur est donnée (IX), il suffit de déterminer le point où elle rencontre l'axe des x ou celui des y; d'ailleurs il est facile de reconnaître dans quel sens elle agit.

L'équilibre donne les trois équations suivantes

$$1°.\ R=0;\quad 2°.\ Rx=0;\quad 3°.\ Ry=0.$$

Elles doivent avoir lieu à la fois, si les points

d'application ne sont pris sur aucun des axes; mais si, comme on en est bien le maître, on les prenait sur l'un des axes, sur celui des x, par exemple, il suffirait pour l'équilibre d'avoir

$$1^{\circ}.\ R = 0; \qquad 2^{\circ}.\ Rx = 0.$$

La raison en est que toutes les puissances étant supposées appliquées à l'axe des x, toutes les coordonnées dans le sens des y sont nulles.

33. *Remarque.* Si on applique (fig. 21) en A et en B à des distances inégales x', x''; y', y'' de chacun des axes, deux forces égales P', P'' dirigées parallèlement et en sens contraire, on a vu (29) que le point d'application de leur résultante $R = 0$, était à une distance infinie des points A et B, et par conséquent à une distance infinie de chacun des axes. Dans ce cas aucun des momens Rx ou Ry ne sera égal à zéro. Le premier sera égal à $P'(x'' - x')$ et le second à $P'(y'' - y')$. Mais si les points A et B sont à égale distance d'un des axes, de celui des x, par exemple, et que cette distance soit une quantité finie, il est évident que le point d'application de R sera à une distance infinie de l'axe des y, et à une distance finie de celui des x; ce qui donnera

pour Rx une quantité finie, et pour Ry une quantité égale à zéro. Il est donc possible qu'un des momens Rx ou Ry soit nul, lorsque la résultante R a pour composantes deux forces parallèles égales, qui agissent en sens contraire sans être directement opposées. On voit par là pourquoi dans l'équilibre on doit avoir ici, généralement parlant, les équations suivantes :

$$1^\circ.\ R=0;\quad 2^\circ.\ Rx=0;\quad 3^\circ.\ Ry=0;$$

ou, ce qui revient au même ;

$$1^\circ.\ P' + P'' + P''' + \ldots = 0;$$
$$2^\circ.\ P'x' + P''x'' + P'''x''' + \ldots = 0;$$
$$3^\circ.\ P'y' + P''y'' + P'''y''' + \ldots = 0.$$

Réciproquement, toutes les fois que les équations précédentes ont lieu, il y a équilibre ; car la première exprime que la résultante est nulle, et les deux autres expriment qu'elle est nulle par l'opposition directe de forces égales ; par conséquent il ne peut y avoir aucune espèce de mouvement.

34. 2°. Si les forces toujours dirigées dans un même plan ne sont pas parallèles, on pourra employer deux méthodes pour la détermination de leur résultante.

Première manière. *Par la composition des forces.*

On prendra d'abord à volonté deux composantes P', P'' dont on prolongera, s'il est nécessaire, les directions jusqu'à ce qu'elles se rencontrent. A partir du point de concours, on construira sur ces directions le parallélogramme ordinaire, dont la diagonale représentera la grandeur et la direction de la résultante R' de ces premieres forces. On cherchera de la même manière la résultante R'' de cette première résultante R', et d'une troisième force P'''. On continuera le même procédé tant qu'il restera des forces à combiner; et la dernière résultante ainsi déterminée donnera la grandeur et la direction de la résultante de toutes les forces qui composent le système.

Deuxième manière. *Par la décomposition des forces.*

Il suffit de recourir à la décomposition que nous avons employée (21) (fig. 14). Elle donne, comme on l'a vu, deux groupes de forces, les unes Y', Y'', Y'''... dirigées suivant l'axe même des y, et dont la résultante Y est égale à leur somme ; les autres perpendiculaires à cet axe, et dont la résultante X est de même égale à la somme de ces dernières. Il ne faut pas oublier que par

somme il faut entendre ici, comme ailleurs, la somme des forces qui agissent dans un sens, moins celle des forces qui agissent en sens contraire. Ainsi on a déjà les deux équations

$$X = X' + X'' + X''' + \text{etc.}$$
$$Y = Y' + Y'' + Y''' + \text{etc.}$$

La force Y étant dirigée suivant l'axe des y, il ne reste plus qu'à trouver sur cet axe le point d'application de X. Il est donné évidemment par l'équation

$$Xy = X'y' + X''y'' + X'''y''' + \text{etc.}$$

ou par

$$y = \frac{X'y' + X''y'' + X'''y''' + \text{etc.}}{X}$$

Si à partir du point ainsi déterminé on construit sur X et sur Y un rectangle, sa diagonale exprimera la grandeur et la direction de la résultante R. Ainsi on aura pour sa valeur

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2},$$

et pour sa direction

$$y - y_1 = \frac{Y}{X} \cdot x,$$

y étant ici une ordonnée quelconque de la droite, qui représente la direction de la résul-

tante, et y_1, celle qui répond à l'abscisse $x = 0$, laquelle par conséquent est égale à $\frac{X'y' + X''y'' + X'''y''' + \text{etc.}}{X}$, et $\frac{Y}{X}$ exprimant la tangente que fait la même droite avec l'axe des x. Au reste, après avoir déterminé la valeur y de l'ordonnée du point d'application de la résultante, on trouvera celle de la perpendiculaire r abaissée de l'origine des coordonnées sur sa direction, par l'équation $Rr = Xy$, ou $r = \frac{X}{Y}y$.

La direction de la résultante étant déterminée, on saura dans quel sens elle agit, en fesant attention aux signes particuliers de X et de Y.

Les conditions de l'équilibre exigent dans ce cas-ci la coexistence des équations suivantes

$$1^\circ.\ R = 0;$$
$$2^\circ.\ Xy = 0; \quad \text{ou} \quad Rr = 0.$$

Il est aisé de voir que la première $R = 0$ suppose qu'on a à la fois $X = 0$, $Y = 0$.

35. Si au lieu de prolonger, comme nous l'avons fait, les directions des puissances jusqu'à la rencontre d'un des axes, on voulait faire entrer dans le calcul les coordonnées mêmes des points où les puissances sont supposées primitivement appliquées, en les représentant à

l'ordinaire par x', y'; x'', y''; x''', y''' ...., on aurait toujours pour déterminer la valeur de la résultante, les deux équations

$$X = X' + X'' + X''' + \text{etc.}$$
$$Y = Y' + Y'' + Y''' + \text{etc.}$$

et on trouverait les coordonnées du point d'application de la résultante, ou plutôt du point de concours des forces X et Y, par le moyen de ces deux-ci :

$$Xy = X'y' + X''y'' + X'''y''' + \text{etc.}$$
$$Yx = Y'x' + Y''x'' + Y'''x''' + \text{etc.},$$

d'où l'on tire

$$y = \frac{X'y' + X''y'' + X'''y''' + \text{etc.}}{X}$$

et

$$x = \frac{Y'x' + Y''x'' + Y'''x''' + \text{etc.}}{Y}.$$

Mais alors il faudra pour l'équilibre ajouter à l'équation $R = o$; ces deux-ci

$$Xy = o, \quad Yx = o;$$

lesquelles devront avoir lieu séparément pour les raisons alléguées ci-dessus.

36. Au surplus, il est évident que ces deux dernières peuvent être remplacées par l'équa-

tion unique

$$Rr = o.$$

Réciproquement, il est visible que toutes les fois que les équations précédentes sont satisfaites, il y a nécessairement équilibre dans le système (33).

Remarquez qu'on aura ici, comme dans le cas où les directions des puissances coïncident en un même point,

$$X' = P' \cos \alpha', \quad Y' = P' \sin \alpha';$$
$$X'' = P'' \cos \alpha'', \quad Y'' = P'' \sin \alpha'';$$
$$X''' = P''' \cos \alpha''', \quad Y''' = P''' \sin \alpha'''$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$X = R \cos \alpha, \quad Y = R \sin \alpha.$$

d'où l'on conclut

$$R^2 = X^2 + Y^2,$$

ou

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2},$$

et

$$\frac{Y}{X} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \operatorname{tang} \alpha.$$

3°. Lorsque les forces sont appliquées à des points qui ne sont pas situés dans un même plan, elles peuvent aussi être parallèles entre elles, ou avoir des directions quelconques. Nous les supposerons d'abord parallèles.

37. Nous avons déjà vu (16) qu'un système de forces parallèles appliquées dans l'espace à différens points liés entre eux invariablement, avait pour résultante une force égale à leur somme; ainsi en représentant toujours par P', P'', P'''... les composantes, et par R leur résultante, nous aurons pour la valeur de celle-ci:

$$R = P' + P'' + P''' + \text{etc.}$$

Cherchons à présent sa position. On peut suivre le procédé qui a été donné pour le cas où les forces parallèles sont situées dans un même plan, et qui s'applique au cas présent.

38. Autrement. Soient x', y', z'; x'', y'', z''; x''', y''', z'''... les coordonnées respectives des points où sont appliquées les puissances P', P'', P'''... Supposons que A, B, (fig. 22) soient les points d'application de P' et de P'', et D celui de leur résultante R. Si par la droite AB on imagine un plan perpendiculaire à celui des y et des z, leur commune section sera une droite B'M, que rencontrera le prolongement de BA en un point quelconque M. Il faut pourtant excepter le cas où BA serait parallèle au plan des y et des z, mais cette circonstance ne change rien à la démonstration. D'après ce que nous

avons vu (13), $R'.DM = P'.AM + P''.BM$. Or ces droites AM, BM, DM sont évidemment proportionnelles aux distances des points d'application A, B et D au plan des y et des z; par conséquent en fesant $DD' = r'$, on aura

$$R'r' = P'x' + P''x''.$$

Par la même raison, en combinant R′ avec une troisième composante P‴, et désignant par R″ leur résultante, et par r'' la droite analogue à r', on aura

$$R''r'' = R'r' + P'''x'''; \quad \text{ou} \quad R''r'' = P'x' + P''x'' + P'''x'''.$$

En suivant le même procédé jusqu'à ce qu'on soit arrivé à la dernière composante, et représentant par x la coordonnée du point d'application de la résultante R dans le sens des x, il viendra

$$1^\circ.\ Rx = P'x' + P''x'' + P'''x''' + \text{etc.}$$

On trouvera semblablement, y et z étant les coordonnées du même point dans le sens des y, et dans le sens des z,

$$2^\circ.\ Ry = P'y' + P''y'' + P'''y''' + \text{etc.}$$
$$3^\circ.\ Rz = P'z' + P''z'' + P'''z''' + \text{etc.};$$

d'où l'on tirera les valeurs suivantes :

$$x = \frac{P'x' + P''x'' + P'''x''' + \text{etc.}}{R}$$

$$y = \frac{P'y' + P''y'' + P'''y''' + \text{etc.}}{R}$$

$$z = \frac{P'z' + P''z'' + P'''z''' + \text{etc.}}{R}$$

Ces trois coordonnées déterminent le point d'application de la résultante dont la direction est d'ailleurs parallèle aux directions des composantes.

Les conditions de l'équilibre exigent qu'on ait à la fois :

$$1^{\circ}.\ R = 0;\quad 2^{\circ}.\ Rx = 0;$$
$$3^{\circ}.\ Ry = 0;\quad 4^{\circ}.\ Rz = 0.$$

En réfléchissant sur ce que nous avons dit (33), on verra pourquoi les trois dernières équations doivent en général avoir lieu en même temps. Mais si on eût supposé l'un des axes, celui des z, par exemple, parallèles aux directions des puissances; on n'aurait eu besoin pour déterminer la situation de la résultante, que des deux équations

$$Rx = P'x' + P''x'' + P'''x''' + \text{etc.}$$
$$Ry = R'y' + R''y'' + R'''y''' + \text{etc.}$$

et pour l'équilibre, il aurait suffi d'ajouter à l'équation $R = 0$; celles-ci

$$Rx = 0\,; \qquad Ry = 0\,;$$

parce que d'une part on n'a besoin que de savoir où la direction de la résultante rencontre le plan des x et des y; et que de l'autre il ne peut y avoir de mouvement de rotation autour de l'axe des z.

Réciproquement, si les équations qu'on vient de donner ont lieu, il est évident qu'il n'y aura dans le système, ni mouvement de translation, ni mouvement de rotation; car les deux dernières équations ne peuvent avoir lieu qu'autant que R est nulle par l'opposition directe de deux forces égales. Le système sera donc en équilibre.

39. L'équation

$$Rx = P'x' + P''x'' + P'''x''' + \text{etc.},$$

aussi bien que chacune des deux autres

$$Ry = P'y' + P''y'' + P'''y''' + \text{etc.}$$
$$Rz = P'z' + P''z'' + P'''z''' + \text{etc.}$$

font voir que pour un nombre quelconque de forces parallèles qui ne sont pas dirigées dans un même plan, le moment de la résultante de ces forces à l'égard d'un plan est égal à la somme des momens des composantes pris par rapport au même plan.

Enfin les valeurs de x, de y et de z que nous venons de trouver (38), étant indépendantes de l'obliquité des puissances à l'égard des plans rectangulaires, nous apprennent que pour un système de forces parallèles situées dans différens plans, il existe un point par où passe constamment la résultante, quelle que soit la direction de ces forces, pourvu que leurs points d'application restent les mêmes ainsi que leurs valeurs; ou que du moins, si on veut changer les valeurs des composantes, on les fasse varier proportionnellement. On aura pourtant égard à la remarque (31) où nous avions déjà annoncé l'existence de ce point appelé *centre des forces parallèles*. On pourrait au surplus le trouver immédiatement en suivant la méthode que nous avons employée dans une autre occasion (32).

On a pu observer que les puissances dont il est question jusqu'ici, avaient toujours une résultante unique. Il n'en est pas de même lorsque les forces appliquées à divers points d'un système de forme invariable ont des directions quelconques; mais si dans ce dernier cas elles ne sont pas réductibles à une seule, du moins est-il toujours possible de les ramener à trois et même à deux, comme nous allons le voir.

40. 4°. Il nous reste donc à considérer à présent le cas où les forces seraient appliquées suivant une direction quelconque, aux différens points d'un système de forme invariable. Nous supposerons qu'on ait donné à trois plans rectangulaires la position convenable pour qu'ils soient rencontrés, s'il est possible, par les directions de toutes les puissances. S'il arrivait que dans le nombre infini de situations différentes qu'on peut leur donner, il y eût toujours une ou plusieurs forces qui leur fussent parallèles, rien n'empêcherait, en vertu du principe de la décomposition (4), de remplacer celles-ci par d'autres dont les directions pourraient les rencontrer; ce qui ne changerait rien à l'effet qui doit résulter de l'action de ces forces. Cela posé, à partir du point de concours des directions des forces avec un des plans, que je suppose être celui des x et des y, on décomposera chacune d'elles en trois autres (9), dont deux soient perpendiculaires l'une à l'autre et dirigées dans ce plan, et la troisième perpendiculaire au même plan. On obtiendra par là deux systèmes de forces, les unes situées dans le plan des x et des y, et les autres parallèles à l'axe des z dont on sait trouver les résultantes (34 et 37).

Remarque. Il peut arriver que les forces per-

pendiculaires au plan donnent deux résultantes $+U$, $-U$ (fig. 33); et les forces dirigées dans le plan deux forces V, — V, qui ne soient pas directement opposées. Alors on pourra décomposer chacune de celles-ci en deux autres S, S'; — T — T', rencontrant les premières en A et B. On aura ainsi trois forces appliquées à chacun de ces points; ce qui donnera deux résultantes R, — R, c'est-à-dire deux forces égales, parallèles, et dirigées en sens contraire. Une décomposition analogue a lieu lorsqu'un des systèmes seulement a une résultante unique U ou V. Donc *on peut toujours réduire à deux* etc.

41. Cherchons maintenant les conditions de l'équilibre.

Soit P' une force appliquée à un point H (fig. 24) qui ait pour coordonnées z', y', x'; et désignons par x_1, y_1, les coordonnées du point a, où sa direction rencontre le plan des x et des y. Soient en outre Z', Y', X' les forces particulières qui résultent de la décomposition de P' parallèlement aux trois axes rectangulaires Cz, Cy, Cx: ainsi en représentant P' par ah, on aura

$$ae = hd = Z', \; ac = Y', \text{ et } ab = X';$$

ensuite

$$HP = z'; PB = y'; \; PG = x' \text{ et } a\alpha = y_1, a\beta = x_1;$$

La

La similitude des triangles $Pa\gamma$, abd, donne la proportion :

$$x' - x_{,} : X' :: aP : ad ;$$

et celle des triangles aPH, adh, la proportion :

$$z' : Z' :: aP : ad.$$

Donc

$$x' - x_{,} : X' :: z' : Z'.$$

On trouvera de même :

$$y' - y_{,} : Y' :: z' : Z'.$$

Donc

$$1^{\circ}. \begin{cases} Z'x_{,} = Z'x' - X'z' \\ Z'y_{,} = Z'y' - Y'z' \end{cases}.$$

Une autre force P″ pour laquelle on désignera par z'', y'', z'', $y_{,,}$, $x_{,,}$; Z'', Y'', X'' les quantités analogues à celles que nous venons de considérer à l'égard de P′ donnera

$$2^{\circ}. \begin{cases} Z''x_{,,} = Z''x'' - X''z'' \\ Z''y_{,,} = Z''y'' - Y''z'' \end{cases}.$$

Une troisième force P‴ donnera de même

$$3^{\circ}. \begin{cases} Z'''x_{,,,} = Z'''x''' - X'''z''' \\ Z'''y_{,,,} = Z'''y''' - Y'''z''' \end{cases};$$

ainsi des autres.

Les forces primitives P′, P″, P‴... *peuvent* donc

être remplacées chacune par trois autres dont deux sont dirigées dans le plan des x *et des* y ; *et dont la troisième est perpendiculaire au même plan.*

Soient à présent x et y les coordonnées du point où la résultante Z des forces perpendiculaires au plan le rencontrent; on aura d'abord

$$Z = Z' + Z'' + Z''' + \text{etc.}$$

Ensuite par la propriété des momens, (38)

$$Zy = Z'y_, + Z''y_{,,} + Z'''y_{,,,} + \text{etc.}$$
$$Zx = Z'x_, + Z''x_{,,} + Z'''x_{,,,} + \text{etc.}$$

Donc aussi

$$(a)\ Zy = Z'y' - Y'z' + Z''y'' - Y''z'' + Z'''y''' - Y'''z''' + \text{etc.}$$
$$(b)\ Zx = Z'x' - X'z' + Z''x'' - X''z'' + Z'''x''' - X'''z''' + \text{etc.}$$

Si nous représentons par p' la résultante ad des forces X', Y', dirigées dans le plan des x et des y, et que nous prolongions da jusqu'à sa rencontre avec la perpendiculaire $Cp = r'$ abaissée de l'origine des coordonnées sur sa direction, nous aurons, comme on l'a vu précédemment (21) $p'r' = X'.Ci$. Or à cause des triangles sembla-

bles ifP, abd, $y' - Ci : x' :: Y' : X'$, donc

$$X'.Ci = X'y' - Y'x',$$

et, par conséquent,

$$p'r' = X'y' - Y'x'.$$

On aura aussi

$$p''r'' = X''y'' - Y''x'';$$
$$p'''r''' = X'''y''' - Y'''x'''.$$
etc.

Mais si p représente la résultante des forces p', p'', p''' ... et r la perpendiculaire abaissée du point C centre des momens, sur sa direction, on a vu (21) qu'on doit avoir

$$pr = p'r' + p''r'' + p'''r''' + \text{etc.}$$

Donc enfin

$$(\gamma)\, pr = X'y' - Y'x' + X''y'' - Y''x'' + X'''y''' - Y'''x''' + \text{etc.}$$

Les principes exposés auparavant mettent en état de déterminer la position de la résultante $p = \sqrt{X^2 + Y^2}$ des forces dirigées dans le plan des x et des y, et celle de la force

$$Z = Z' + Z'' + Z''' + \text{etc.}$$

Il est visible que ces résultantes partielles p et Z ne pourront se réduire à une seule que dans

le cas où leurs directions se rencontreront. Alors, la résultante R de toutes les forces du système, aura, pour expression, comme nous l'avons déjà dit, $\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$.

42. Pour l'équilibre, on aura d'abord les équations

$$X = 0; \quad Y = 0; \quad Z = 0;$$

ou les suivantes

$$(1)\ X' + X'' + X''' + \ldots = 0;$$
$$(2)\ Y' + Y'' + Y''' + \ldots = 0;$$
$$(3)\ Z' + Z'' + Z''' + \ldots = 0;$$

Ces trois équations suffiraient, si chacune des résultantes partielles était nulle par l'opposition directe de deux forces égales. Il faut donc encore exprimer que cette dernière circonstance a lieu, en posant

$$Zx = 0; \quad Zy = 0; \quad pr = 0;$$

ou, ce qui revient au même,

$$(4)\ Z'x' - X'z' + Z''x'' - X''z'' + Z'''x''' - X'''z''' + \ldots = 0;$$
$$(5)\ Z'y' - Y'z' + Z''y'' - Y''z'' + Z'''y''' - Y'''z''' + \ldots = 0;$$
$$(6)\ X'y' - Y'x' + X''y'' - Y''x'' + X'''y''' - Y'''x''' + \ldots = 0.$$

Des six équations précédentes (1), (2), (3), (4), (5), (6), les trois premières sont relatives au mouvement de translation, et les trois dernières au mouvement de rotation; ensorte que lorsqu'elles ont lieu, toutes en même temps, il n'y a aucune espèce de mouvement dans le système; ce qui est le caractère distinctif de l'état d'équilibre.

Remarquez qu'au lieu de prolonger les directions des forces jusqu'au plan des x et des y, on aurait pu les prolonger jusqu'à celui des x et des z; et en procédant comme tout à l'heure, on serait arrivé aux mêmes résultats pour les conditions de l'équilibre. Alors Y aurait été la résultante des forces perpendiculaires au plan des x et des z, et elle aurait donné la cinquième et la sixième des équations que nous venons de trouver; tandis que la quantité relative à pr, qui dans ce cas aurait exprimé le moment de la résultante des forces X', Z'; X'', Z''; X''', Z'''..., situées dans le plan des x et des z, aurait donné la quatrième.

Enfin, si on avait prolongé les directions des forces jusqu'au plan des y et des z, la résultante X des forces perpendiculaires à ce plan, aurait donné la quatrième et la sixième équation, et le produit relatif à pr, qui aurait exprimé le mo-

ment de la résultante des forces Y', Z'; Y'', Z''; Y''', Z'''... situées dans ce même plan, aurait donné la cinquième.

43. On peut juger actuellement de ce qui arriverait si les équations trouvées ci-dessus n'avaient pas lieu toutes à la fois.

Si on avait seulement $X=o$, $Y=o$, $Z=o$, on en conclurait qu'il n'y a point de mouvement de translation dans le système ; mais il y aurait un mouvement de rotation, dont ce n'est pas ici le lieu d'examiner la nature.

Il est inutile de s'arrêter au cas où une ou même deux des trois premières équations seulement seraient vraies. On voit sur le champ ce qui en résulterait ; mais si l'une des trois dernières équations avait lieu sans les autres ; si, par exemple, on avait seulement

$$X'y' - Y'x' + X''y'' - Y''x'' + X'''y''' - Y'''x''' + \ldots = o ;$$

ou, ce qui revient au même,

$$pr = o ,$$

Qu'arriverait-il? L'équilibre aurait lieu autour de l'axe des z, si cet axe était supposé immobile ; car alors l'équation $pr=o$, ne serait vraie qu'autant que la résultante des forces

X', Y'; X'', Y''.... dirigées dans le plan des x et des y, passerait par l'origine des coordonnées. Elle serait donc détruite par la résistance de l'axe des z. D'ailleurs la résultante Z des forces parallèles à ce même axe serait aussi nécessairement détruite ; car elle pourrait être remplacée (4) par deux forces, dont les directions prolongées rencontreraient cet axe. Donc *l'équilibre aurait lieu autour de l'axe des z, etc.*

Si la cinquième équation seulement avait lieu, on ferait voir pareillement que le système serait en équilibre autour de l'axe des x, supposé fixe, et que si l'axe des y était fixé d'une manière invariable, il y aurait équilibre autour de ce dernier, si la quatrième équation seulement avait lieu.

44. Supposons à présent que deux des trois dernières équations seulement aient lieu à la fois; par exemple, la quatrième et la cinquième; on en conclura que la résultante Z passe par l'origine des coordonnées; car, à cause des équations (α), (β), on aura $Zx = 0$, $Zy = 0$; mais puisque Z n'est pas nul, il s'ensuit que $y = 0$, $x = 0$, et que par conséquent la résultante Z coïncide avec l'axe des z.

La coexistence de deux autres équations, de

la cinquième et de la sixième, si on veut, conduirait à une conséquence analogue, c'est-à-dire, qu'alors la résultante Y des forces parallèles à l'axe des y, coïnciderait avec cet axe, car dans ce cas on aurait $Yx=0$, $Yz=0$, x et y exprimant les distances respectives de Y au plan des x et des z, et à celui des y et des x après la décomposition des forces P′, P″, P‴... faite dans le plan des x et des z. On ferait voir de même, que si la quatrième et la sixième, prises ensemble, avaient lieu, la résultante X, après une décomposition analogue aux précédentes, passerait par l'origine des coordonnées.

Concluons de là que lorsque les trois équations (4), (5), (6) ont lieu en même tems, les forces primitives P′, P″, P‴... ont une résultante unique qui passe par l'origine des coordonnées. Ainsi un obstacle placé en ce point, et qui serait capable de supporter un effort égal à $\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}$, anéantirait l'effet de toutes les puissances. En général, si on imagine un point fixe dans le système; en le prenant pour l'origine des coordonnées, il suffira pour l'équilibre, que les équations (4), (5), (6) aient lieu, en même temps, par rapport à ce point.

45. Il s'agit à présent d'assigner un caractère

particulier auquel on puisse reconnaître que les forces proposées P′, P″, etc. ont une résultante unique, lorsque les trois dernières équations n'ont pas lieu, c'est-à-dire, lorsque les seconds membres des équations (α), (β), (γ) ne sont pas égaux à zéro. Nous représenterons, pour abréger le calcul, ces seconds membres par A, B, C, et nous transporterons l'origine en un autre point qui ait a, b, c pour coordonnées; ensorte que s', t', u'; u'', t'', s''; etc. étant les nouvelles coordonnées des points d'application des puissances P′, P″, etc. on ait $x'=a+s'$, $y'=b+t'$, $z'=c+u'$; $x''=a+s''$, $y''=b+t''$, $z''=c+u''$; etc.

Alors A se changera en $Zb - Yc + A'$;
B.......... en $Za - Xc + B'$;
C.......... en $Xb - Ya + C'$;

A′, B′, C′ exprimant ce que deviennent A, B, C, lorsqu'on écrit s', t', u'; etc. à la place de x', y', z'; etc.; mais si la nouvelle origine des coordonnées est prise sur un des points de la résultante, on doit avoir $A'=0$, $B'=0$, $C'=0$; donc alors

$$A = Zb - Yc,\ B = Za - Xc,\ C = Xb - Ya;$$

d'où l'on conclura

$$AX - BY - CZ = 0,$$

pour l'équation de condition qui doit exister lorsque les puissances P', P'', P''' ..., appliquées aux différens points du système, doivent avoir une résultante unique.

Dans le cas particulier où $X = 0$, $Y = 0$, $Z = 0$; les valeurs de A, B, C deviennent nulles, alors les six équations qui constituent l'état d'équilibre ont lieu; d'où il suit que dans ce cas, les forces P', P'', P''' ... ne peuvent avoir une résultante unique, qu'autant qu'elles se font équilibre.

46. *Remarque.* Nous avons supposé, ou plutôt regardé comme évident, qu'il est nécessaire que les directions de deux forces soient dans un même plan pour qu'elles soient réductibles à une seule. En effet, lorsque deux forces sont situées dans deux plans différens, si elles avaient une résultante, elles pourraient être détruites par la résistance d'un axe fixe, qui joindrait la résultante avec une des composantes, sans rencontrer la seconde. Or cela est impossible; car rien ne s'opposerait au mouvement de rotation que celle-ci tend à produire autour de l'axe. Donc si l'équilibre est impossible avec cet axe fixe, à plus forte raison le sera-t-il, si le système est libre.

Nous avons dit ci-dessus (43), que la résul-

tante parallèle à l'un des axes fixes était détruite par la résistance de cet axe ; que X, par exemple, était détruite par l'axe des x supposé immobile; cependant, comme son effet ne peut être nul, voyons quel il peut être.

J'élève par deux points A et B (fig. 25), pris à volonté sur l'axe immobile, deux perpendiculaires AS, BT prolongées jusqu'à la rencontre de la direction de la force X; que je suppose appliquée en M, milieu de ST, et représentée en grandeur par MN. Je la décompose en deux autres MK, ML dirigées vers les points A et B. Je décompose de nouveau ces dernières aux points A et B en deux, l'une dirigée suivant l'axe des x, et l'autre perpendiculaire au même axe. Il en résulte, suivant l'axe, deux forces égales chacune à la moitié de X, et qui, étant ajoutées, équivalent conséquemment à la force X. Ainsi l'axe des x est sollicité au mouvement suivant sa longueur, de la même manière que si cette force lui était immédiatement appliquée.

Quant aux deux autres perpendiculaires à l'axe des x, elles font voir que le moment de l'une d'elles, pris par rapport au point d'application de l'autre, est égal au moment de X, comme cela doit être, le moment de la com-

posante de X, qui passe par le centre des momens, étant nul, par rapport à ce point.

Remarque. On a supposé la force X appliquée au milieu de la droite ST, afin qu'après la décomposition tout fût égal de part et d'autre; on aurait pu choisir tout autre point d'aplication pour X; en comparant les triangles semblables, on serait arrivé aux mêmes conséquences.

47. Comme les trois dernières équations trouvées ci-dessus, se composent de produits qui contiennent les mêmes lettres; si on désigne par S (Yx) la somme des produits, qui renferment Y et x; par S (Xy) celle des produits qui se composent de X et de y, ainsi des autres; les trois dernières équations pourront être mises sous cette forme :

$$(4)\quad S(Zx) - S(Xz) = 0,$$
$$(5)\quad S(Yz) - S(Zy) = 0,$$
$$(6)\quad S(Yx) - S(Xy) = 0.$$

Alors les six équations relatives à l'équilibre, seront exprimées comme il suit, d'une manière abrégée :

$$1.\quad X = 0,$$
$$2.\quad Y = 0,$$
$$3.\quad Z = 0;$$
$$4.\quad S(Zx) - S(Xz) = 0,$$
$$5.\quad S(Yz) - S(Zy) = 0,$$
$$6.\quad S(Yx) - S(Xy) = 0.$$

Si les puissances P', P'', P'''... étaient dirigées dans un même plan, dans celui des x et des y, par exemple ; ou dans un plan parallèle à celui-ci, et à une distance $= d$; à cause des quantités $Z', Z'', Z''' \ldots = 0$, et des quantités $z', z'', z''' \ldots = 0$, ou $=$ à une constante ; les six équations se réduiront à celles-ci :

$$1.\quad X = 0,$$
$$2.\quad Y = 0;$$
$$3.\quad Y'x' - X'y' + Y''x'' - X''y'' + \ldots = 0.$$

Mais par la propriété des momens,

$$Y'x' - X'y' = P'p'; \quad Y''x'' - X''y'' = P''p'' \ldots$$

on pourra donc remplacer la troisième par celle-ci :

$$P'p' + P''p'' + P'''p''' + \ldots = 0,$$

ou

$$Rr = 0;$$

ce qui redonne pour les conditions de l'équilibre les mêmes équations que nous avons trouvées pour ce cas.

RÉCAPITULATION.

Des équations qui donnent la valeur et la direction de la résultante avec les conditions de l'équilibre pour les différens cas que nous avons traités dans les articles précédens.

I.

Forces appliquées au même point.

1°. Si les forces coïncident, on a

$$R = P' + P'' + P''' + \text{etc.}$$

pour la valeur de la résultante.

$$R = 0$$

pour l'équilibre.

2°. Si les forces sont dirigées d'une manière quelconque dans un même plan, on a

$$X = X' + X'' + X''' + \text{etc.}$$
$$Y = Y' + Y'' + Y''' + \text{etc.},$$

d'où

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2}$$

pour la valeur de la résultante,

$$y - y' = \frac{Y}{X}(x - x')$$

pour la direction de la résultante.

$$\left.\begin{matrix} X = 0 \\ Y = 0 \end{matrix}\right\} \text{ ou } R = 0 \text{ pour l'équilibre.}$$

3°. Si les forces ont des directions quelconques dans l'espace,

$$X = X' + X'' + X''' + \text{etc.}$$
$$Y = Y' + Y'' + Y''' + \text{etc.}$$
$$Z = Z' + Z'' + Z'' + \text{etc.}$$

d'où

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$$

pour la valeur de la résultante;

$$y - y' = \frac{Y}{X}(x - x')$$
$$y - y' = \frac{Y}{Z}(z - z')$$

pour la direction de la résultante.

$$\left.\begin{matrix} X = 0 \\ Y = 0 \\ Z = 0 \end{matrix}\right\} \text{ ou } R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} = 0$$

pour l'équilibre.

II.

Forces appliquées à différens points.

1°. Si les forces sont dirigées dans un même plan et parallèles, on a

$$R = P' + P'' + P''' + \text{etc.}$$

pour la valeur de la résultante.

$$Rx = P'x' + P''x'' + P'''x''' + \text{etc.}$$
$$Ry = P'y' + P''y'' + P'''y''' + \text{etc}$$

pour la position de la résultante.

$$\left.\begin{array}{l} R = 0, \\ Rx = 0, \\ Ry = 0, \end{array}\right\} \text{pour l'équilibre.}$$

2°. Si les forces dirigées dans le même plan ne sont pas parallèles, on a

$$X = X' + X'' + X''' + \text{etc.}$$
$$Y = Y' + Y'' + Y''' + \text{etc.}$$

d'où

$$\left.\begin{array}{l} R = \sqrt{X^2 + Y^2} \text{ pour la valeur} \\ y - y' = \frac{Y}{X} x \text{ pour la direction} \end{array}\right\} \text{de la résultante.}$$

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} X = 0, \\ Y = 0; \end{array}\right\} \text{ou } R = \sqrt{X^2 + Y^2} = 0; \\ \qquad Ry = 0, \\ \qquad Rx = 0. \end{array}\right\} \text{pour l'équilibre.}$$

3°. Si

3°. Si les forces sont dirigées parallèlement dans différens plans, on a

$$R = P' + P'' + P''' + \text{etc.}$$

pour la valeur de la résultante.

$$\left.\begin{array}{l} Rx = P'x' + P''x'' + P'''x''' + \text{etc.} \\ Ry = P'y' + P''y'' + P'''y''' + \text{etc.} \\ Rz = P'z' + P''z'' + P'''z''' + \text{etc.} \end{array}\right\} \text{pour la position de la résultante.}$$

$$\left.\begin{array}{l} R = o \\ Rx = o \\ Ry = o \\ Rz = o \end{array}\right\} \text{pour l'équilibre.}$$

N. B. Le nombre des équations peut être diminué en plaçant l'un des axes parallèlement aux directions des puissances.

4°. Si les forces ont des directions quelconques dans l'espace, et peuvent être réduites à une seule, on a

$$X = X' + X'' + X''' + \text{etc.}$$
$$Y = Y' + Y'' + Y''' + \text{etc.}$$
$$Z = Z' + Z'' + Z''' + \text{etc.}$$

d'où

$$\left.\begin{array}{ll} R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} & \text{pour la valeur} \\ \left.\begin{array}{l} y = \frac{Y}{X}\, x \\ y = \frac{Y}{Z}\, z \end{array}\right\} & \text{pour la direction} \end{array}\right\} \text{de la résultante.}$$

Ici les coordonnées sont comptées d'un point pris sur la direction de la résultante.

$$\left.\begin{array}{l} X = o, \\ Y = o, \\ Z = o, \end{array}\right\} \text{ ou } R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} = o.$$

$$S(Zx) - S(Xz) = o,$$
$$S(Yz) - S(Zy) = o,$$
$$S(Yx) - S(Xy) = o,$$

pour l'équilibre.

Par le moyen des propositions que nous avons démontrées dans les chapitres précédens, on peut résoudre toutes les questions relatives à la composition et à la décomposition des forces. Si le nombre des équations que fournit la question est égal à celui des inconnues, le problème sera déterminé; et si le nombre des inconnues surpasse celui des équations, le problème sera indéterminé.

CHAPITRE III.

Du centre de gravité.

48. La *masse* d'un corps est la somme des parties matérielles dont il est composé. Il ne faut pas la confondre avec le volume ; car on conçoit que sous un volume donné, deux corps peuvent contenir une quantité de matière très-différente. Il semblerait d'après cette définition, que pour déterminer le rapport des masses de deux corps, il serait nécessaire d'évaluer le nombre de parties matérielles dont chacun est composé en particulier ; mais comme la nature intime de la matière nous est inconnue, et que le nombre de molécules, ou parties matérielles qu'un corps renferme est inassignable, on sent que cette évaluation est impossible. Il faut donc recourir à un autre moyen pour comparer les masses entr'elles. Nous verrons bientôt qu'elles sont proportionnelles aux poids; et comme le rapport de ceux-ci est facile à déterminer, nous aurons aussi sans peine celui des masses.

La *densité* est l'unité de masse. Elle ex-

prime le nombre de parties matérielles contenues dans un volume déterminé, pris pour unité de mesure. Il suit de là qu'en multipliant le nombre qui exprime la densité, par celui qui représente le volume, on a la masse. Ainsi en désignant par M la masse d'un corps, par D sa densité, et par S son volume, on aura

$$M = D.S.$$

d'où l'on conclura

$$D = \frac{M}{S};$$

et

$$S = \frac{M}{D}.$$

On aura de même pour un autre corps, dont la masse seroit M′, la densité D′ et le volume S′, ces autres équations :

$$M' = D'.S';$$

$$D' = \frac{M'}{S'};$$

$$S' = \frac{M'}{D'}.$$

Il est donc facile de comparer les masses ou les densités, ou les volumes des corps. On voit que si les volumes sont égaux, les masses sont comme les densités; que si les densités

sont égales, les masses sont comme les volumes, et que si les masses sont égales, les densités sont en raison inverse des volumes.

49. On entend par *pesanteur* ou *gravité* cette force en vertu de laquelle les corps sont portés vers le centre de la terre, suivant une direction perpendiculaire à la surface des eaux tranquilles. Elle produit par son action uniforme et instantanée sur toutes les parties matérielles d'un corps, ce qu'on appelle le *poids*. Le poids suppose donc dans le corps une tendance continuelle au mouvement; c'est ce que nous sommes à portée d'éprouver et d'observer à chaque instant. Dès qu'un corps cesse d'être soutenu, on le voit tomber aussitôt, c'est-à-dire, se mouvoir vers la surface de la terre, suivant une direction verticale. On peut juger qu'un poids est plus ou moins considérable, par l'effort qu'on doit faire pour l'empêcher d'obéir à l'action de la pesanteur.

L'action de la gravité sur un corps est d'autant plus petite, qu'il est plus éloigné du centre de la terre. Elle diminue dans le rapport du carré des distances. Ainsi un corps placé sous l'équateur, doit, à raison de l'aplatissement du globe terrestre, moins peser que s'il était trans-

porté vers les pôles. D'ailleurs la force centrifuge qui résulte de la rotation de la terre autour de son axe, doit encore contribuer à diminuer, dans le premier cas, l'effet de la gravité ; parce que sous l'équateur la force centrifuge est plus grande qu'ailleurs, et qu'elle est nulle aux pôles. Mais ce n'est pas ici le lieu de nous livrer à la discussion de ces détails, quelqu'intéressans qu'ils soient. Nous sommes obligés de les renvoyer à la Dynamique, à laquelle ils appartiennent spécialement. Contentons-nous de savoir pour le moment, que la gravité est une force qui pénètre toutes les parties de la matière, qu'elle agit constamment, et qu'elle est la même pour tous les corps situés dans un même lieu, ou à peu près dans un même lieu. Aussi voit-on deux corps de densité différente, parcourir des espaces égaux dans des temps égaux, lorsque la résistance de l'air ne s'oppose pas à leur chute. Si les corps qu'on appelle *légers* paraissent prendre sous nos yeux une direction différente, cela tient à des principes d'hydrostatique, dont nous sommes aussi obligés de renvoyer l'explication.

De ce que la pesanteur agit constamment sur toutes les parties matérielles dont un corps est composé, et que le poids n'est autre chose

que le résultat de l'action instantanée et égale de cette force sur ces molécules, il s'ensuit que les poids sont proportionnels aux masses, comme nous l'avons annoncé ci-dessus.

50. La *pesanteur spécifique* est ce que pèse l'unité de volume d'une matière quelconque, comparativement à ce que pèse l'unité de volume d'une matière donnée, qui sert de terme de comparaison ; ainsi en multipliant la pesanteur spécifique d'un corps par son volume, on a le poids.

La pesanteur spécifique, d'après l'idée que nous venons d'en donner, est à la densité ce que le poids est à la masse. En désignant par S le volume d'un corps, par p sa pesanteur specifique, et par P son poids, on aura

$$P = p.S;$$

et si P' représente le poids d'un autre corps, p' sa pesanteur spécifique, et S' son volume, on aura de même

$$P' = p'.S'.$$

Ces équations donnent les moyens d'établir entre les quantités homogènes qui entrent dans leurs expressions les rapports qui leur con-

viennent. Par exemple, lorsque deux poids sont égaux, leurs volumes sont réciproquement proportionnels à leurs pesanteurs spécifiques ou à leurs densités.

Comme la pesanteur agit suivant des directions qui tendent vers le centre de la terre, et que la distance du point de concours est incomparablement plus grande que les dimensions des corps que l'on considère ordinairement, il s'ensuit que toutes les forces qui résultent de l'action de la pesanteur dans ce cas-ci, peuvent être regardées, sans erreur sensible, comme parallèles. Ainsi les principes que nous avons établis dans le chapitre précédent pour les forces parallèles, trouveront ici leur application. On en conclura, par exemple, qu'à l'égard d'un corps ou d'un système de corps, il existe un point par où passe constamment la résultante de l'action de la pesanteur sur le système de toutes les parties matérielles, tant qu'elles conserveront entr'elles leurs positions respectives. Ce point remarquable est ce qu'on appelle *centre de gravité*.

Observez cependant que les directions de la pesanteur étant invariables, il conviendra pour la démonstration de faire tourner le système autour de l'origine des coordonnées; alors les forces

restent verticales sans changer de valeur; et comme les molécules conservent leurs distances respectives aux axes, ou aux plans, on arrivera évidemment aux mêmes résultats (32 et 39).

51. *Le centre de gravité d'un corps ou d'un système de corps est* donc *le point par où passe constamment la résultante de l'action de la pesanteur sur toutes les parties matérielles qui les composent, quelle que soit d'ailleurs la situation du corps ou du système à l'égard de l'horizon.* Puisque l'action instantanée de la gravité sur toutes les molécules d'un corps, constitue, comme on l'a déjà dit, ce qu'on appelle *le poids de ce corps*, il s'ensuit qu'on peut regarder toute la masse du système comme réunie à son centre de gravité. Ainsi pour empêcher un corps quelconque d'obéir à l'action de la pesanteur, il suffit de placer un obstacle sur la verticale qui passe par son centre de gravité. Ce que nous venons de dire fournit en plusieurs occasions un moyen assez facile de trouver dans la pratique le centre de gravité d'un corps. On le suspendra successivement par deux points différens avec un fil ou un cordon; le point où leurs directions prolongées se rencontreront sera le point cherché.

Au reste, quelle que soit la nature de la force

qu'on suppose agir sur toutes les molécules d'un corps; si son action est la même, et dirigée parallèlement sur chacune d'elles, il est évident qu'il en proviendra autant de forces parallèles dont la résultante passera constamment par un même point dans toutes les situations du système ; et ce point sera le même que celui que nous avons appelé *centre de gravité*. Par conséquent, il serait peut-être plus convenable de nommer ce point *centre d'inertie*, comme l'ont fait plusieurs Géomètres ; la dénomination de centre de gravité ne paraissant relative qu'à l'action de la pesanteur.

On voit par ce qui précède, qu'il se présente deux moyens de trouver le centre de gravité ou d'inertie. On peut faire usage ou du principe de la composition des forces parallèles, ou de celui des momens. On choisira celui qui paraîtra le plus commode suivant les circonstances. Mais il est bon d'observer avant tout, que toutes les fois qu'on a un système de molécules pesantes égales deux à deux, et placées symétriquement autour d'un point, de manière que les droites qui les joignent s'entrecoupent mutuellement en deux parties égales, ce point qui dans ce cas est le centre de figure sera en même temps le centre d'inertie. Car le point

où toutes les droites s'entrecoupent est le centre particulier d'inertie de deux molécules homologues ; il sera donc aussi le centre commun d'inertie de tout le système.

Ainsi le centre d'inertie d'une droite uniformément pesante est à son milieu ; car tous les points de la ligne pris deux à deux, sont à égale distance de ce point.

Par la même raison, le centre d'inertie d'un polygone régulier ou symétrique est au centre de figure. On peut dire la même chose du centre d'inertie de l'aire ou de la circonférence d'un cercle, d'une ellipse, etc.

Remarque. Avant de donner les formules générales qui servent à la détermination du centre de gravité d'une figure quelconque et que nous renvoyons à la fin de ce Traité, sous le titre d'Additions ; nous ferons usage des moyens que fournit la Géométrie élémentaire pour trouver le centre de gravité des figures qu'on a coutume de considérer plus particulièrement dans les Elémens, persuadés, que s'il est possible de trouver dans les résultats généraux que nous offre l'analyse, ceux que nous avons intérêt de connaître, ce n'est pas une raison de négliger les méthodes simples dont l'application est plus facile dans la pratique, et qui par cela même doivent se

trouver à la portée d'un plus grand nombre de personnes. Mais il ne faudra pas perdre de vue que les forces que l'on considère ici n'étant rien autre chose que les poids des corps auxquels les masses sont proportionnelles, on pourra leur substituer les volumes mêmes des corps, lorsque la matière qui les compose sera homogène.

PROBLÈME I.

52. *Trouver le centre de gravité du contour d'un polygone quelconque.*

Nous avons dit ci-dessus qu'on pouvait employer deux moyens pour le trouver.

1°. *Par le principe de la composition.* Soit le polygone ABDEC. Tous les côtés AB, AC, CE, ED, DB étant supposés d'une matière homogène et le centre de gravité d'une ligne droite étant en son milieu, on pourra supposer la masse du côté AB concentrée en son milieu M, et celle du côté AC en son milieu M' (fig. 26); cela posé, à cause que les masses des côtés sont proportionnelles à leurs longueurs, pour avoir le centre commun de gravité des deux côtés AB, AC, il faudra diviser la droite MM', qui joint leurs milieux, en deux parties qui leur soient réciproquement proportionnelles, de ma-

nière qu'on ait AB:AC::M'I:MI, ou plutôt, AB+AC:AC::MM':MI. Le point I sera celui où l'on pourra supposer réunie la masse des deux côtés AB, AC. En joignant ensuite le point I et le milieu M'' d'un autre côté CE, on cherchera semblablement le centre de gravité I' de la masse concentrée en I, et de celle du côté CE, en fesant la proposition

$$AB+AC:CE::M''I':II',$$

ou

$$AB+AC+CE:CE::IM'':II';$$

ce qui donnera le point I', où l'on pourra supposer concentrée la masse des trois côtés AB, AC, CE. En continuant le même procédé à l'égard des autres côtés du polygone; il est évident qu'on trouvera à la fin le point où l'on pourra supposer réunie la masse entière du contour du polygone, et ce point sera celui qu'on se proposait de déterminer.

2°. *Par le principe des momens.* On imaginera deux axes quelconques Cx, Cy dans le plan du polygone, on multipliera chaque côté du polygone par la distance de son milieu à l'un des axes, et on divisera la somme des produits par le périmètre du polygone, le quotient donnera la distance du centre de gra-

vité à l'axe, par rapport auquel on a pris les momens. On fera la même chose à l'égard du second axe, et on aura semblablement la distance du centre de gravité à ce second axe. On connaîtra donc par là la position du centre de gravité du contour du polygone.

PROBLÈME II.

53. *Trouver le centre de gravité de l'aire d'un triangle.*

D'un des angles du triangle donné BAC, (fig. 27) de l'angle A, par exemple, je mène au milieu D du côté opposé BC la ligne droite AD; cette ligne comprendra le centre de gravité de l'aire du triangle, puisqu'elle divise en deux parties égales tous les élémens qui, placés parallèlement à la base BC, constituent la masse de ce triangle. Par la même raison, la ligne CE, menée de l'angle C au milieu du côté opposé AB, passera aussi par le centre de gravité de l'aire du triangle. Le centre de gravité sera donc au point d'intersection G des deux droites AD, CE. Pour trouver la valeur de DG ou de AG, je mène la droite ED. Puisque les côtés AB, BC sont coupés proportionnellement, DE est parallèle à AC, et les deux triangles DEG et AGC sont semblables; ce qui donne la proportion DE : AC :: DG : AG; mais

DE est la moitié de AC; donc DG est aussi la moitié de AG. Donc si on divise la ligne AD en trois parties égales, le centre de gravité de l'aire du triangle sera sur cette droite, à l'extrémité de la première division, à partir du point D, ou à l'extrémité de la seconde division, à partir du point A; c'est-à-dire, que *si du sommet d'un triangle quelconque, on mène une droite au milieu de sa base, le centre de gravité de l'aire du triangle est au tiers de cette ligne, à compter de la base, ou aux deux tiers à compter du sommet.* On fait ici abstraction de l'épaisseur qu'un triangle matériel doit avoir nécessairement, parce qu'on la suppose infiniment petite et égale dans toute son étendue; mais si on veut y avoir égard, il faudra placer le centre de gravité au milieu de la droite qui, passant par le point C, mesure l'épaisseur réelle de ce triangle. La même remarque subsiste, toutes les fois qu'il s'agit du centre de gravité des surfaces.

Corollaire. Il est facile à présent de trouver le centre de gravité de l'aire d'un polygone quelconque, puisque tout polygone peut être partagé en triangles. On supposera la masse de chacun de ces triangles réunie à son centre de

gravité; il ne s'agira plus que de déterminer le centre commun de gravité d'un système de masses dont les valeurs sont proportionnelles aux aires mêmes des triangles; ce qu'on trouvera facilement par les méthodes qui viennent d'être exposées.

PROBLÈME III.

54. *Trouver le centre de gravité de l'aire d'un trapèze.*

Soit ABDC (fig. 28) le trapèze dont il s'agit. Tous les élémens superficiels parallèles aux bases AB et CD étant divisés en deux parties égales par la droite EF menée par les milieux de AB et de CD, il est évident que le centre de gravité du trapèze sera d'abord sur cette droite. Je partage ensuite le trapèze en deux triangles par la diagonale CB; je mène les droites CE et BF. A partir du point E je prends le tiers EK de EC, et à partir du point F le tiers FH de FB; je joins les points K et H, et le centre de gravité du trapèze sera aussi sur la droite KH. Il sera donc au point d'intersection G des droites EF et KH. Il ne reste plus qu'à chercher la valeur de FG. Des points K et H je mène les parallèles KL et HI aux bases du trapèze et les triangles semblables EKL, ECF

ECF donnent $EL = \frac{1}{3}EF$ et $KL = \frac{1}{3}CF = \frac{1}{6}CD$. De même, à cause de la similitude des triangles FIH, FBE on a

$$FI = \tfrac{1}{3}EF; \quad IH = \tfrac{1}{3}EB = \tfrac{1}{6}AB.$$

Donc aussi $IL = \frac{1}{3}EF$. Soient, pour abréger, $EF = h$, $CD = b$, $AB = b'$. Les triangles semblables KLG, IGH donnent la proportion

$$KL : HI :: LG : IG;$$

ou

$$b : b' :: LG : IG;$$

d'où

$$b + b' : b' :: \tfrac{1}{3}h : IG.$$

Donc

$$IG = \tfrac{1}{3}h \cdot \frac{b'}{b + b'};$$

et par conséquent

$$FI + IG \text{ ou } FG = \tfrac{1}{3}h + \tfrac{1}{3}h \cdot \frac{b'}{b + b'} = \tfrac{1}{3}h \cdot \frac{b + 2b'}{b + b'}.$$

Si on suppose $b' = b$, le trapèze se change en parallélogramme, et FG devient $= \frac{h}{2}$, comme nous le savions d'avance; mais si $b' = 0$, le trapèze devient un triangle, et $FG = \frac{1}{3}h$; ce qui redonne, comme cela devait être, la valeur que nous avions trouvée pour le triangle. Enfin si $h = 0$, le trapèze se confond avec la base CD, et FG se trouve égal à zéro; mais

tout cela ne nous apprend rien que nous ne sussions déjà.

Remarque. Si par le sommet A d'un triangle ABC (fig. 29) on fait passer un plan quelconque ADE, la distance du centre de gravité G de ce triangle au plan est égale au tiers de la somme des perpendiculaires abaissées des deux autres angles sur ce plan. Soient les perpendiculaires BD, CE, FH, GI abaissées des deux angles B, C, du milieu F de BC et du centre de gravité G du triangle sur le plan DAE, qui passe par le sommet A; à cause que FH est dans le plan des parallèles BD, CE, on aura $FH = \frac{1}{2}(BD + CE)$. Mais les triangles semblables AFH, AGI donnent la proportion

$$AF : AG :: FH : GI,$$

ou, parce que le point G est le centre de gravité du triangle BAC,

$$3 : 2 :: \tfrac{1}{2}(BD + CE) : GI = \frac{BD + CE}{3}.$$

Donc si on imagine un second plan parallèle au premier et qui en soit éloigné d'une quantité K, il faudra, pour avoir la distance du centre de gravité du triangle à ce nouveau plan, ajouter à $\frac{BD + CE}{3}$, la quantité $K = \frac{3K}{3}$, ce qui donne

$\frac{BD+K}{3}+\frac{CE+K}{3}+\frac{K}{3}$ pour cette distance, ou le tiers de la somme des trois perpendiculaires abaissées des angles du triangle sur ce nouveau plan.

Si ce nouveau plan, au lieu d'être au-dessous du plan DAE, était placé au-dessus, il est évident qu'il faudrait prendre négativement la quantité K. Il est aisé de voir ce qu'il en résulterait.

PROBLÈME IV.

55. *Trouver le centre de gravité d'une pyramide triangulaire.*

Du sommet S de la pyramide SABC (fig. 30), je mène la droite SI au centre de gravité de la base triangulaire ABC; et comme cette ligne passe par le centre de gravité de toutes les tranches élémentaires parallèles à la base, et dont on peut supposer que la pyramide est composée, elle contiendra le centre de gravité de la pyramide entière. Par la même raison, si de l'angle C on mène au centre de gravité K de la face ASB la droite CK, elle contiendra aussi le centre de gravité de la pyramide. Il se trouvera donc au point d'intersection G des deux droites

SI, KC situées dans le plan SDC. Reste à trouver la valeur de IG. Les deux côtés DC, DS du triangle SDC étant coupés proportionnellement aux points I et K, la droite KI est parallèle à SC. Donc les deux triangles GKI et GCS sont semblables et donnent la proportion

$$KI : CS :: GI : GS.$$

Mais

$$KI : CS :: DI : DC :: 1 : 3;$$

donc

$$1 : 3 :: GI : GS;$$

d'où

$$GI = \tfrac{1}{3} GS = \tfrac{1}{4} IS.$$

Donc *si du sommet d'une pyramide triangulaire on mène une droite au centre de gravité de la base, le centre de gravité de la pyramide sera au quart de cette ligne à compter de la base, ou aux trois quarts à compter du sommet.*

Corollaire I. Quel que soit le polygone qui sert de base à une pyramide donnée, on peut toujours la concevoir décomposée en autant de pyramides triangulaires, qu'on pourra former de triangles dans le polygone, et qui auront toutes un même sommet. Mais si, à partir de la base, on mène au quart d'une des arêtes, parallèlement à cette base, un plan quelconque,

ce plan coupera de la même manière les droites menées du sommet commun au centre de gravité des bases de chacune des pyramides triangulaires, savoir, au quart de ces lignes à compter de la base de la pyramide proposée. Donc le centre de gravité de la pyramide entière sera dans ce plan; mais il doit aussi se trouver sur la droite menée du sommet de la pyramide au centre de gravité de sa base. Il sera donc au point d'intersection de cette droite et du plan. Donc *si du sommet d'une pyramide quelconque on mène au centre de gravité de sa base une ligne droite, le centre de gravité de la pyramide sera au quart de cette droite à partir de la base, ou aux trois quarts à partir du sommet.*

Corollaire II. On peut aussi conclure de ce qui précède que le centre de gravité d'un cône est sur la droite menée de son sommet au centre de gravité de sa base, et au quart de cette droite à compter de la base. Car la proposition que nous venons de démontrer est vraie pour une pyramide inscrite ou circonscrite, qui différerait du cône d'une quantité plus petite qu'aucune quantité assignable.

Les principes qui viennent d'être établis suffisent pour trouver le centre de gravité d'un polyèdre quelconque, ou même de tout solide

qu'on pourra sans erreur sensible décomposer en pyramides; car après avoir déterminé le centre de gravité de chaque pyramide en particulier, on supposera chacun de ces points chargé du poids de la pyramide correspondante; et le reste s'achevera, comme il vient d'être dit.

Remarque. C'est ici le lieu de démontrer une proposition analogue à celle qui a été donnée ci-dessus relativement à la position du centre de gravité du triangle.

Si des quatre angles d'une pyramide triangulaire on abaisse des perpendiculaires sur un plan quelconque, la distance du centre de gravité de la pyramide à ce plan sera égale au quart de la somme de ces quatre perpendiculaires.

Soit la pyramide triangulaire SABC (fig. 31), et soient menées des trois angles A, C, B, du milieu M de AB, du point γ centre de gravité du triangle ACB, et du point G centre de gravité de la pyramide, les perpendiculaires, Aa, Bb, Cc, Mm, $\gamma\gamma'$, Gg sur le plan aSb, qui passe par le sommet S; on aura d'abord

$$Mm = \tfrac{1}{2}(Aa + Bb);$$

ensuite

$$\gamma\gamma' = \tfrac{2}{3}Mm + \tfrac{1}{3}Cc = \tfrac{1}{3}(Aa + Bb + Cc);$$

et enfin, à cause de $SG = \frac{3}{4} S\gamma$,

$$Gg = \tfrac{3}{4}\gamma\gamma' = \tfrac{1}{4}(Aa + Bb + Cc).$$

Mais si on imagine un second plan parallèle au premier, et qui en soit éloigné d'une quantité K, il faudra ajouter cette quantité $K = \frac{4}{4}K$ à la distance $\frac{Aa + Bb + Cc}{4}$. Donc *la distance du centre de gravité d'une pyramide triangulaire à un plan quelconque, est égale au quart de la somme des perpendiculaires abaissées des quatre angles sur ce plan.*

CHAPITRE IV.

Des Machines.

56. On comprend en général, sous le nom de *Machines*, toute espèce d'agent ou d'instrument propre à transmettre l'action des forces. Dans l'usage qu'on en fait, on n'a pas toujours pour but d'augmenter l'action dont une force est capable. Souvent elles ne sont destinées qu'à donner à la puissance une direction plus avantageuse, pour produire l'effet qu'on a en vue. Quelquefois aussi on les emploie pour régler les mouvemens des corps, suivant certaines conditions relatives au tems ou à d'autres circonstances.

On distingue plusieurs espèces de machines. Les unes sont simples, et les autres composées; mais comme celles-ci ne sont que des combinaisons plus ou moins compliquées des premières, il suffit de connaître les propriétés des machines simples. Les auteurs de Statique en admettent quelquefois jusqu'à sept, savoir : les cordes, le lévier, la poulie, le plan incliné, le

treuil, la vis et le coin. Nous les considérerons séparément les unes après les autres en suivant le même ordre; mais on verra bientôt que le nombre en peut être réduit; et même en ne les considérant que sous le rapport de l'équilibre, on pourrait à la rigueur les réduire à une machine unique, le lévier.

Des Cordes.

57. Les *Cordes* sont des corps plus ou moins flexibles d'une forme quelconque, mais le plus souvent cylindrique, et dont la longueur ordinairement surpasse beaucoup les autres dimensions. Elles sont un moyen de communication entre les différentes puissances. Comme elles sont employées dans presque toutes les machines, elles seront les premières dont nous chercherons à faire connaître les propriétés. Pour arriver à notre but, nous les supposerons parfaitement flexibles, inextensibles et sans pesanteur, sauf à les considérer ensuite dans leur état naturel. Varignon, dans sa *nouvelle Mécanique*, en a traité fort au long, et c'est depuis lui, qu'on les a rangées dans la classe des machines simples, sous le nom de *machine funiculaire*.

Dans ce que nous allons dire sur les cordes,

nous ferons abstraction de leur diamètre, et nous leur substituerons par la pensée un fil qui passerait par l'axe du cylindre qu'elles forment. Ainsi nous supposerons que la puissance appliquée à la corde agit suivant la direction de cet axe ; supposition d'autant plus permise, que si la corde a tous ses fils également tendus, la résultante de toutes ces tensions passe nécessairement par l'axe.

Si une corde fixée à l'une de ses extrémités est tirée par une puissance quelconque, elle devient plus ou moins tendue, et sa tension s'estime par l'effort exercé par la puissance, ou, ce qui revient au même, par l'effort que le point fixe doit soutenir. Ainsi une corde sollicitée en sens contraire par deux forces égales, éprouve de part et d'autre une tension égale à l'une de ces forces ; mais si l'une d'elles l'emporte sur l'autre, sa tension est mesurée par la plus petite des deux forces; car il est évident qu'en vertu de l'excès de la plus grande sur la plus petite, la corde serait entraînée dans le sens de la direction de la plus grande, sans éprouver de la part de cet excès aucun effort.

Si trois puissances P', P'', P''' (fig. 32), appliquées aux trois cordes A', A'', A''' unies ensemble par le nœud C, doivent se faire équilibre, il est

évident que l'une d'elles P''', par exemple, doit être égale et directement opposée à la résultante des deux autres; ce qui exige que les trois cordons soient situés dans un même plan, et que les puissances soient entr'elles chacune comme le sinus de l'angle compris entre les directions des deux autres. Réciproquement lorsque ces dernières conditions sont remplies, l'équilibre a nécessairement lieu, pourvu toutefois qu'une des forces soit directement opposée à la résultante des deux autres.

Si on suppose plus de trois forces appliquées chacune à l'un des cordons assemblés par un nœud fixe, on pourra faire usage du principe de la composition pour trouver les conditions de l'équilibre. On cherchera d'abord la résultante de deux de ces forces, ce qui réduira le nombre à une de moins. On continuera la même réduction jusqu'à ce qu'il ne reste plus que deux de ces forces, qui pour l'équilibre doivent être égales et directement opposées.

La même chose aurait lieu, si quelques-uns des cordons étaient attachés à des appuis immobiles; car l'effort soutenu par chacun de ces appuis tiendrait lieu de puissance.

Supposons à présent qu'une corde attachée par ses extrémités (fig. 53), soit tirée par dif-

férentes puissances P′, P″, P‴, P^{iv}... appliquées à des points fixes C′, C″, C‴, C^{iv}... il est évident que le système entier ou le polygone funiculaire ne sera en équilibre qu'autant que les conditions que nous venons d'exposer pour un seul nœud, auront lieu en même tems pour chacun des nœuds en particulier. Ainsi supposons que la corde MC′ C″ C‴ C^{iv}... N soit retenue par ses extrémités M, N. En désignant par m l'effort que supporte le point M, ou, ce qui revient au même, la tension du cordon MC′; par n celle du dernier cordon, et par a', a'', a'''... les tensions des cordons intermédiaires C′C″, C″C‴, C‴C^{iv}..., on devra avoir pour l'équilibre autour du point C′:

$$m : P' : a' :: \sin(a', P') : \sin(a', m) : \sin(m, P');$$

autour du point C″:

$$a' : P'' : a'' :: \sin(a'', P'') : (\sin a', a'') : (\sin a', P'');$$

autour du point C‴:

$$a'' : P''' : a''' :: \sin(a''', P''') : \sin(a'', a''') : \sin(a'', P''').$$

etc.

Au moyen de ces suites proportionnelles, il sera aisé de déterminer le rapport de deux puissances, ou de deux tensions, ou d'une tension et d'une puissance. Si, par exemple, on veut connaître le rapport des tensions des

deux cordons extrêmes, ou le rapport de $m:n$, on fera cette suite de proportions :

$$m:a' :: \sin(a', P') : \sin(m, P'),$$
$$a':a'' :: \sin(a'', P'') : \sin(a', P''),$$
$$a'':a''' :: \sin(a''', P''') : \sin(a'', P''').$$
. . . .

On continuera jusqu'à ce qu'on soit arrivé à la proportion dont le premier rapport soit celui de la tension de l'avant-dernier cordon à celle du dernier. On voit sur le champ qu'en multipliant par ordre toutes ces proportions, on trouve immédiatement le rapport cherché $m:n$.

Cet exemple fait connaître suffisamment ce qu'il y aurait à faire pour trouver le rapport de deux autres quantités.

S'il y avait plusieurs puissances appliquées à un nœud, on les réduirait à une seule ; et on rentrerait dans le cas précédent.

Quels que soient le nombre et la direction des forces, on pourra toujours, sans troubler l'équilibre du polygone funiculaire, leur substituer une force unique, qui passe par le point de concours des deux cordons extrêmes prolongés. Car le système étant en équilibre, la résultante de deux forces quelconques prises à volonté, doit être égale et directement opposée

à la résultante de toutes les autres ; mais la résultante des deux tensions extrêmes ou des puissances qui les représentent, passe évidemment par le point de concours de leurs directions. Donc celle des autres forces doit aussi passer par le même point. Donc etc.

Il suit de là qu'on peut transporter parallèlement à leurs directions les puissances P', P'', P'''. . . et les supposer appliquées au point de concours des cordons extrêmes, l'équilibre n'en sera point troublé. Mais comme l'état d'équilibre dans tout le système permet de prendre chaque nœud pour un point fixe, deux cordons quelconques pris à volonté, peuvent être regardés comme les cordons extrêmes d'un polygone funiculaire. Par conséquent on pourra supprimer les nœuds intermédiaires, ainsi que les puissances qui leur sont appliquées, pourvu qu'on remplace les premiers par un nœud unique auquel on appliquera, suivant leurs directions respectives, les forces supprimées ou leur résultante.

Nous avons supposé que les deux cordons prolongés devoient se rencontrer ; c'est ce qui ne peut manquer d'arriver, lorsqu'ils sont situés dans un même plan, comme nous le supposons ici, pourvu toutefois que leurs direc-

tions ne soient pas parallèles. Si les deux cordons dont il s'agit, étaient parallèles, la démonstration que nous venons de donner serait encore vraie; mais alors, pour avoir la position de la résultante, il faudrait joindre les deux cordons par une droite, et la diviser en parties réciproquement proportionnelles aux tensions de ces cordons (10).

Lorsque les puissances sont parallèles et agissent toutes dans le même sens, leur résultante, comme nous l'avons vu précédemment, est égale à leur somme et leur est parallèle. Considérons donc (fig. 34) une corde pesante attachée par ses extrémités M, N, et ne recevant d'autre impulsion que celle de la gravité, il est clair qu'elle prendra dans l'état d'équilibre, une courbure quelconque MAN, dont nous déterminerons dans la suite la nature. La résultante de toutes ces forces, qui agissent sur elle dans ce cas, ne sera rien autre chose que son propre poids. Elle passera par le point de concours T des deux tangentes extrêmes MT, NT, et sera dirigée suivant la verticale VT. En désignant par m et n les charges des deux appuis, et par P le poids de la corde, on aura

$$P : \sin MTN :: m : \sin NTV :: n : \sin MTV.$$

Au lieu de l'appui N, concevons une puissance $P' = n$, dirigée suivant la tangente TN, on aura

$$P' : m :: \sin MTV : \sin NTV.$$

On voit par là que l'action que la puissance P' exercerait immédiatement par elle-même sur le point M, est à celle qu'elle exerce réellement par l'entremise de la corde pesante

$$:: \sin MTV : \sin NTV.$$

On tire de la proportion précédente

$$m = \frac{P' \sin NTV}{\sin MTV}.$$

Il est visible que lorsque les deux points M et N sont dans une même ligne horizontale, l'action de la puissance P' est transmise en totalité au point M, parce qu'alors $\sin NTV = \sin MTV$; mais si le point N est plus élevé que le point M, la puissance perd alors une partie de l'action qu'elle serait en état d'exercer sur le point M, si la corde n'était pas pesante. Le contraire aura lieu si le point N est plus bas que le point M. Dans ce cas, l'effort que le point M a à soutenir, est plus considérable que P'. On voit ainsi comment le poids des cordes peut modifier dans certains cas l'action des puissances.

La proportion $P' : P :: \sin MTV : \sin MTN$, fait

fait voir qu'il est impossible de tendre une corde pesante, suivant une droite MIN qui ne serait pas verticale; car on aurait alors sin MTN $=$ sin MIN $= 0$, et sin MTV $=$ sin MIV; d'où l'on conclurait $P' = \frac{P . \sin MIV}{0} = \infty$; ou $P = 0$; résultats également impossibles.

58. *Si le cordon auquel la puissance est appliquée porte un anneau traversé par une corde arrêtée à ses deux extrémités, l'équilibre aura lieu, lorsque la direction de la puissance divisera en deux parties égales l'angle formé par les deux cordons.*

Pour rendre la chose plus sensible, supposons un poids P (fig. 35), attaché à un cordon qui porte à son extrémité A un anneau que traverse la corde MAN, arrêtée par les deux points fixes M et N. Il est évident que si ces deux points sont situés dans une ligne horizontale, et si la direction verticale AV du poids divise en deux parties égales l'angle MAN, le poids P ne peut prendre aucun mouvement; l'équilibre aura donc lieu, et la tension de la corde sera la même dans toute son étendue; mais l'équilibre ne sera pas troublé, si au lieu des points fixes M et N, on prend les points M et N', ou, au lieu de ce dernier, tout autre point situé sur la direction de AN. Donc etc.

Or il est clair que ce que nous venons de dire ici d'un poids, s'applique à toute autre puissance dirigée d'une manière quelconque, pourvu que le nœud de réunion soit un nœud coulant.

Concluons de là que la puissance P est à la charge d'un des appuis M ou N :: sin MAN : sin $\frac{1}{2}$ MAN, ou :: 2 cos $\frac{1}{2}$ MAN : 1.

Il suit encore de ce qui précède, que si deux puissances agissent l'une contre l'autre par le moyen d'une corde qui enveloppe le contour d'un polygone ou d'une courbe, l'équilibre ne peut avoir lieu qu'autant que ces deux puissances sont égales entr'elles; et alors la tension de la corde est la même dans toute sa longueur.

Ce que nous venons d'exposer nous met à portée de résoudre la question suivante, qu'on peut appliquer aux réverbères destinés à éclairer les rues.

PROBLÈME.

59. *La longueur d'une corde étant donnée avec les points de suspension de ses extrémités, trouver dans quelle situation un poids quelconque soutenu par cette corde, au moyen d'un nœud coulant, restera en équilibre.*

Soient M et N' les points de suspension. Si par le point M on imagine une horizontale terminée par la rencontre de la verticale N'V',

les droites MV′ et V′N′ seront connues. Si on prolonge la verticale V′N′ jusqu'à ce qu'elle soit rencontrée en B par le prolongement de MA, il est clair qu'à cause de l'égalité des angles AN′B, ABN′, le triangle AN′B est isoscèle et AB = AN′. Par conséquent la longueur de la corde MAN′ = MAB; et de plus, si du point A on abaisse une perpendiculaire sur N′B, elle divisera cette dernière ligne en deux parties égales; ce qui fournit la construction suivante : avec un rayon égal à la longueur de la corde, décrivez un arc qui rencontre la verticale V′N′ prolongée en un point B; divisez la droite NB en deux également, au point C; par ce dernier point menez une parallèle à MN jusqu'à ce qu'elle rencontre MB en un point quelconque A. Ce point sera celui qu'on cherche.

Il est si facile d'appliquer le calcul à cette question, qu'il est inutile de s'y arrêter plus long-tems.

Remarque. Si on veut employer le principe de la décomposition pour assigner les conditions de l'équilibre dans le polygone funiculaire, on devra satisfaire, pour chaque nœud, aux équations qui constituent l'équilibre entre plusieurs puissances appliquées à un même point (p. 94); mais il

faut faire attention que si, pour un nœud, la tension d'un cordon doit être considérée comme une force qui agit dans un sens de sa direction ; elle doit être considérée, pour le nœud suivant, comme une force qui agit en sens opposé. Par exemple, dans le polygone MC′C″C‴...N (fig. 33), la tension a' du cordon C′C″ qui joint les nœuds voisins C′, C″ devant être considérée comme une force qui agit suivant C′C″ pour le nœud C′, devra pour le nœud C″ être considérée comme une force a' agissant en sens contraire suivant C″C′.

Quant aux signes qu'il faudra donner aux puissances, qui proviennent de la décomposition, on s'aidera pour en déterminer la nature des réflexions que nous avons faites. (27 et 28).

Du Lévier.

60. Le *lévier* est une verge d'une forme quelconque, considérée comme inflexible, et sans pesanteur. On s'en sert ordinairement, en l'appuyant ou le faisant tourner sur un point fixe, pour mouvoir un corps pesant. Il y a trois choses à considérer dans cette machine; savoir : l'appui, le poids et la puissance; ce qui donne lieu à la distinction de trois sortes de léviers. Dans le lévier de la première espèce, l'appui est placé entre le poids et la puissance; dans celui de la seconde, le poids est

placé entre l'appui et la puissance ; et dans le lévier de la troisième espèce, la puissance est placée entre le poids et l'appui.

Il est aisé de voir que la théorie du lévier, n'est qu'une application de celle des momens. En effet, prenons d'abord le cas le plus simple, celui où toutes les puissances seraient dirigées dans un même plan ; comme l'équilibre doit avoir lieu autour d'un point fixe, leur résultante doit nécessairement être dirigée vers ce point. Cette condition sera suffisante si le lévier ne peut prendre qu'un mouvement de rotation autour de l'appui ; mais s'il était seulement porté sur une surface, il faudrait de plus, pour l'empêcher de glisser, que cette direction fût perpendiculaire au plan tangent mené par le point où elle rencontre l'appui. Il suit de là, qu'en prenant les momens par rapport au point d'appui (21), la somme des momens des puissances appliquées au lévier doit être nulle. Ainsi, (fig. 36) dans le lévier coudé BAC, pour que les puissances P et Q se fassent équilibre, il faut qu'en abaissant du point d'appui A, les perpendiculaires AP′, AQ′ sur leurs directions, on ait

$$P.AP' = Q.AQ', \text{ ou } P.p = Q.q,$$

p et q représentant ces perpendiculaires.

Si les puissances P et Q étaient deux poids ; alors leurs directions deviendraient parallèles et verticales ; si de plus, le lévier était droit, on aurait toujours (fig. 37) ; $P.AP' = Q.AQ'$, ou, à cause des triangles semblables ABP', ACQ', $P.AB = Q.AC$; c'est-à-dire, que deux poids qui se font équilibre, sont en raison inverse ou réciproque des distances de leurs points d'application au point d'appui. Les parties AB, AC comprises entre l'appui et les points d'application, se nomment *les bras du lévier;* et on a coutume d'exprimer dans ce cas la condition de l'équilibre, en disant que la puissance et le poids doivent être réciproquement comme les longueurs des bras de lévier qui leur correspondent.

Si la puissance Q, que je représente par CD, n'était pas parallèle au poids P, rien n'empêcherait de la décomposer en deux autres q, q', (fig. 38), la première verticale et la seconde dirigée suivant la longueur du lévier, et on pourrait substituer au moment de Q, celui de q; car on aurait évidemment, à cause de la similitude des triangles, $Q.AQ' = q.AC$. Dans ce cas, la force q' exprimerait l'effort que l'appui aurait à soutenir, suivant la longueur du lévier, si celui-ci était assujéti.

On conclura de ce qui précède, que dans le lévier de la première espèce, la puissance peut être plus petite ou plus grande que le poids, ou lui être égale; que dans le lévier de la seconde espèce, la puissance est toujours plus petite que le poids; et qu'au contraire dans celui de la troisième espèce, la puissance est toujours plus grande. Cependant ce dernier est celui que la nature a employé le plus fréquemment dans l'économie animale; mais aussi il faut remarquer pour rendre raison de cette structure, que plus la puissance est proche du point d'appui, moins elle a de chemin à faire pour en faire parcourir un très-grand au poids; car il est visible que les points C et B du lévier ACB (fig. 39), en tournant autour du point d'appui A, décrivent à chaque instant des arcs semblables et proportionnels aux rayons AC, AB; et par conséquent en raison inverse des puissances Q et P.

Quant aux conditions de l'équilibre, lorsque les puissances appliquées au lévier ont des directions quelconques, nous renvoyons aux articles 40 et suivans, où l'on trouvera les éclaircissemens nécessaires.

Nous avons supposé jusqu'ici la masse du lévier nulle, ou du moins assez petite pour

qu'il fût inutile d'en tenir compte ; mais s'il est à propos d'y avoir égard, on considérera le poids du lévier comme une puissance verticale appliquée à son centre de gravité ; et l'équation donnée ci-dessus, deviendra, en désignant par $\Pi\pi$ le moment du lévier,

$$Pp + \Pi\pi = Q.q,$$

formule, au moyen de laquelle on peut trouver la valeur d'une des quantités qui entrent dans son expression, lorsque les autres sont connues.

L'équation précédente suppose que le centre de gravité du lévier tombe entre l'appui et le point d'application du poids P ; s'il tombait de l'autre côté, l'équation de l'équilibre serait

$$Pp = \Pi\pi + Q.q.$$

Il est donc possible que le poids seul du lévier fasse équilibre au poids P ; car en fesant $Q = o$, on peut toujours satisfaire à l'équation $P.p = \Pi\pi$, en donnant au lévier la longueur convenable ; mais si on continue à augmenter la longueur du lévier qui convient à ce cas, la quantité $\Pi\pi$ deviendra $> P.p$; alors le produit $Q.q$ devra être négatif ; ce qui nécessitera un changement de signe pour Q ou pour q ; ou, ce qui revient au même, un changement dans la direction de la puissance, ou bien dans la

position du point où elle devra être appliquée.

Pour avoir la longueur l du lévier dont le poids seul ferait équilibre au poids P, on observera que si m exprime la pesanteur spécifique du lévier supposé uniformément pesant dans toute son étendue, ou plutôt ce que pèse une partie de sa longueur prise pour unité, on aura

$$P.p = ml(\tfrac{1}{2}l - p);$$

d'où l'on tirera

$$l = p + \sqrt{p^2 + \frac{2.Pp}{m}}.$$

L'équation $Qq = P.p + \Pi.\pi$ ou $Qq = P.p + \frac{mq^2}{2}$ convient également aux léviers de la seconde et de la troisième espèce; on en tire pour la valeur de la puissance Q,

$$Q = \frac{P.p}{q} + \frac{mq}{2};$$

(1) or, il est visible qu'en fesant varier q, cette expression est susceptible d'un *minimum;* qu'on trouvera en égalant à zéro la différentielle du second membre. On en conclura

$$q = \sqrt{\frac{2Pp}{m}};$$

(1) La fin de ce numéro suppose la connaissance du calcul différentiel.

et substituant dans la valeur de Q, il viendra

$$Q = \sqrt{2mPp}$$

pour la plus petite valeur dont la puissance soit susceptible, lorsqu'on a égard au poids du lévier.

De la Balance.

61. Tout le monde connaît l'usage et la construction de la balance ordinaire. On sait que cette machine est composée d'un lévier droit BC (fig. 40) nommé *fléau*, aux extrémités duquel sont suspendus deux bassins M, M' destinés à recevoir les objets qu'on veut peser. Le fléau porte dans son milieu un axe qui lui est perpendiculaire, et dont les extrémités tournent librement dans des ouvertures pratiquées aux deux branches montantes d'une châsse qui soutient la machine. On donne aux extrémités de l'axe la forme la plus commode pour que le fléau puisse s'incliner avec le plus de liberté possible. On voit, d'après cette description, que la balance est un lévier de la première espèce. Pour en faire usage, on commence par établir l'équilibre, le fléau étant dans une position horizontale, indépendamment des poids qui doivent se contrebalancer. On n'a plus besoin alors de s'occuper du poids de la machine, qui sera

dans le même cas, que si toutes les parties qui la composent étaient sans pesanteur. Il est en outre important que les deux bras de la balance soient égaux, car sans cela, le plus long bras favorisant le poids placé de son côté, deux poids inégaux pourraient se faire équilibre; de sorte que de deux poids égaux celui qui serait placé dans le bassin le plus éloigné de l'axe, l'emporterait sur l'autre. Ces sortes de balance sont dites *fausses*. Cependant on peut s'en servir pour trouver le poids exact d'une marchandise, en s'y prenant de la manière suivante:

On place le corps X dont on veut déterminer le poids, dans un des bassins M dont je suppose la distance au point d'appui $A = a$, et on établit l'équilibre en plaçant dans l'autre bassin M' dont la distance au point d'appui est a', un poids connu K. On met ensuite le poids inconnu X dans le second bassin M', et on fait de même l'équilibre au moyen d'un autre poids connu K' placé dans le premier bassin M; on aura par là les deux équations d'équilibre :

$$X.a = K.a', \quad X.a' = K'a;$$

D'où, après avoir multiplié par ordre et divisé par aa', on tirera $X^2 = K.K'$, et $X = \sqrt{K.K'}$.

Du Peson ou de la Romaine.

62. La *romaine* (fig. 41) est composée d'un fléau suspendu par une anse, qui le divise en deux bras sensiblement inégaux. On attache au bras le plus court AD un bassin C ou un crochet destiné à soutenir les marchandises qu'on veut peser. En fesant couler, au moyen d'un anneau le long du bras le plus long DB, un même poids P, on le place à une distance convenable du point d'appui D pour faire équilibre au corps suspendu à l'autre extrémité. Il s'agit de déterminer les points de division du bras DB, auxquels le poids P doit répondre pour faire équilibre à différens poids X placés en C.

Soient F le poids du bras AD, lequel je suppose appliqué en E; H le poids de l'autre bras DB, supposé réuni en G, et C le poids du bassin ou du crochet, qui agit verticalement sur le point A. Plaçons successivement en C différens poids X, X', X", etc., et supposons de plus que pour faire prendre une position horizontale et établir l'équilibre, il faille placer le poids constant P à des distances du point d'appui D représentées par Da, Db, Dc... ou x, x', x''... on aura, en fesant $AD=a$, $ED=b$, $DG=c$, les équa-

tions suivantes :

$$X a + F.b + C.a = Px + H.c;$$
$$X'a + F.b + C.a = Px' + H'.c;$$
$$X''a + F.b + C.a = P.x'' + H.c;$$
etc.

d'où l'on conclura :

$$(X' - X) a = P (x' - x);$$
$$(X'' - X') a = P (x'' - x');$$
$$(X''' - X'') a = P (x''' - x'');$$
etc.

On voit par là que si les poids X, X', X'', etc., croissent en progression arithmétique, les distances $x' - x$, $x'' - x'$, $x''' - x''$, etc. ou *ab*, *bc*, etc. seront égales. Si en outre on suppose $P = X' - X = X'' - X'$ etc., toutes ces distances seront égales à *a*, ou à la longueur du bras le plus court du fléau AB.

La charge du point d'appui dans le peson se trouve en ajoutant au poids de la machine celui du corps placé dans le bassin avec le poids constant P ; au lieu que dans la balance ordinaire il faut ajouter à son propre poids le double du poids placé dans l'un des bassins. Aussi la romaine, eu égard à la résistance des pièces dont se composent les machines, est-elle préférable

à la balance ordinaire pour peser les corps dont le poids est un peu considérable.

63. Nous terminerons cet article par l'explication d'un paradoxe de mécanique, que présente l'équilibre considéré dans la machine connue sous le nom de *Balance de Roberval.* Elle consiste (fig. 42) en une règle AB, à laquelle on attache deux autres règles CD, EF mobiles autour de deux clous qui les retiennent. On attache de même aux extrémités C, D; E, F deux autres règles CE, DF également mobiles autour de ces points, ensorte que le rectangle CDFE peut prendre une autre figure et une autre situation *cdfe*. On implante perpendiculairement sur la règle CE et sur la règle DF vis-à-vis l'un de l'autre deux bâtons destinés à porter deux poids égaux P, P'. Cela posé, on observe qu'en quelque endroit qu'on suspende sur les bâtons les deux poids, l'équilibre n'est point troublé, même lorsqu'ils ne sont pas également éloignés des points d'appui A ou B. Que devient donc alors cette règle générale, que dans le lévier deux poids égaux pour être en équilibre, doivent être à égale distance du point d'appui? On rendra raison de cette espèce de paradoxe, en fesant attention à la manière dont les poids P, P'

agissent l'un sur l'autre. Pour cela, on décomposera l'effort du poids P appliqué en L (fig. 43) en deux, l'un dirigé suivant DL, et l'autre suivant LF; ensuite chacun de ceux-ci, appliqués respectivement en D et en F pareillement en deux, les uns DM, FM′ dirigés suivant DF, et les autres DN, FN′ perpendiculaires à DF. Une semblable décomposition de l'autre côté donnera deux forces suivant CE, qui contrebalanceront évidemment celles qui sont dirigées suivant DF, comme étant égales et placées à égale distance des appuis. Voyons à présent ce que deviennent les forces perpendiculaires aux règles DF, CE. La force DN, par exemple, se décomposera en deux, l'une dirigée suivant CD, qui sera détruite par la résistance du point B et une autre dirigée suivant DF. De même la force FN′ se décomposera en deux, l'une dirigée suivant FE, qui sera détruite par la résistance du point A et l'autre dirigée suivant FD. Celle-ci sera égale et directement opposée à la première dirigée suivant DF; par conséquent elles se détruiront réciproquement. Un semblable résultat aura lieu de l'autre côté des appuis A, B. Donc l'équilibre subsistera dans la machine en question, en quelqu'endroit G et L (fig. 42) des soutiens GH, IK qu'on ait placé deux poids égaux P, P′.

De la Poulie.

64. La *poulie* consiste en une roue plus ou moins grande, creusée dans sa circonférence et assujétie à tourner autour d'un axe placé à son centre. On s'en sert communément pour élever un poids au moyen d'une corde qu'on fait glisser dans la rainure de la circonférence. L'axe sur lequel tourne la poulie se nomme *goujon*, ou *boulon*; et la pièce fixe qui le porte, l'*écharpe* ou la *chape*.

La poulie est dite *fixe* ou *immobile*, lorsqu'elle ne peut prendre qu'un mouvement de rotation autour de son axe. Elle est dite *mobile*, lorsqu'elle se meut ou tend à se mouvoir avec le poids qu'elle soutient, et en général avec la résistance qu'elle est destinée à vaincre.

L'assemblage de plusieurs poulies, les unes fixes, les autres mobiles, toutes embrassées par une même corde, se nomme *mouffle*; et en termes de marine, *palans*, *caliornes*.

Si la corde qui embrasse la poulie est tirée par deux puissances qui tendent à la faire glisser en sens contraire, il est clair que pour se faire équilibre, elles doivent être nécessairement égales; d'où il suit que la corde doit être également

ment tendue dans toute sa longueur. Cette égalité de tension est indépendante de la forme de la poulie. Elle aurait lieu, quand même la poulie n'aurait pas une forme circulaire, qui est celle qu'on lui donne ordinairement comme plus simple et plus commode dans la pratique.

Soient donc, P, Q deux puissances appliquées aux extrémités E, E′ d'une corde EOE′, qui embrasse la partie TOT′ de la circonférence d'une poulie fixe (fig. 44). Si on prolonge leurs directions jusqu'à ce qu'elles se rencontrent en A, et si on prend les lignes égales AB, AC pour exprimer ces puissances, leur résultante sera représentée par la diagonale AD du losange ACDB ; ainsi l'obstacle destiné à anéantir leur effet doit être placé sur la direction AD de cette diagonale. Or il est aisé de voir que le centre K de la poulie circulaire est sur cette direction ; l'équilibre aura donc lieu autour du centre, pourvu que ce point soit capable de soutenir un effort égal à $R = 2Q \cos \frac{1}{2}(P, Q)$, valeur de la diagonale AD.

Il est bon d'observer que la direction de la diagonale doit rencontrer perpendiculairement la surface TOT′. Sans cela il y aurait un mouvement de rotation, au moins dans le cas où le

corps serait libre et abstraction faite du frottement.

Si on mène les rayons KT, KT′, ils seront perpendiculaires respectivement aux directions AT, AT′ des puissances P et Q; de plus AD sera perpendiculaire à la soustendante TST′. Donc les deux triangles BAD, KTT′ sont semblables et donnent la proportion :

$$Q : R :: KT : TST' ;$$

d'où

$$Q = \frac{KT}{TST'} . R = \frac{r}{s} . R,$$

r désignant le rayon de la poulie, et s la soustendante de l'arc TOT′. Si les directions sont parallèles, comme alors la soustendante devient un diamètre, on aura $Q = \frac{KT}{2KT} . R = \frac{R}{2}$, c'est-à-dire que la charge de la poulie est double d'une des puissances; ce qu'on savait d'avance (10) et ce qui se trouve confirmé d'ailleurs par l'expression de $R = 2Q . \cos \frac{1}{2} (P, Q)$.

Les mêmes équations conviennent à la poulie mobile. Il suffit de supposer la corde fixée à une de ses extrémités E et de regarder la puissance Q comme destinée à vaincre une résistance R dirigée suivant AD′. On en conclura que dans la poulie mobile, la puissance a d'autant moins

d'effort à faire pour produire l'effet qu'on a en vue, que les directions TE, T'E' approchent du parallélisme, et que lorsqu'elles sont parallèles, la puissance n'est plus que la moitié de la résistance, comme on vient de le voir.

Ce que nous venons de dire s'applique naturellement à la poulie composée, ou en général à un système de poulies, quel qu'en soit le nombre, et quelle qu'en soit la position. Par exemple, si un poids P est soutenu par une puissance Q, au moyen de plusieurs poulies disposées de manière que la corde qui embrasse chacune d'elles soit fixée invariablement par l'une de ses extrémités, et attachée par l'autre à la chape de la poulie voisine, comme on le voit (fig. 45). En désignant par r, r', r'' les rayons des poulies B, B', B'' et par t, t', t'' les tensions des cordons E, E', E'', on aura d'abord $Q = t$, parce que la poulie A ne sert qu'à changer la direction de la force Q; et c'est même pour cela qu'on l'appelle aussi poulie de *renvoi;* ensuite t ou

$$Q = \tfrac{1}{2} t', \quad t' = \tfrac{1}{2} t'', \quad t'' = \tfrac{1}{2} P;$$

d'où l'on conclut par la multiplication,

$$Q = \frac{P}{8} = \frac{P}{2^3}.$$

En général on aura $Q = \frac{P}{2^n}$, n étant le nombre de poulies mobiles.

Lorsque les directions des cordons qui embrassent chacune des poulies ne sont pas parallèles, il n'est pas non plus difficile de trouver la relation entre la puissance et la résistance dans le cas de l'équilibre; car en désignant par s, s', s'' les soustendantes des arcs embrassés par les cordes, et par r, r', r'' les rayons correspondans, nous aurons, comme ci-dessus :

$$t \text{ ou } Q = \frac{r}{s}.t', \; t' = \frac{r'}{s'}.t'', \; t'' = \frac{r''}{s''}.P,$$

et par conséquent,

$$Q = \frac{r.r'.r''}{s.s'.s''}.P.$$

La disposition des poulies qu'on vient de considérer n'est pas la plus commode. On préfère à cet assemblage celui où toutes les poulies sont embrassées par une même corde, dont les unes sont fixes et les autres mobiles. C'est ce qu'on appelle, comme nous l'avons déjà dit, *mouffles*, *palans*, *caliornes*. Dans ce dernier système, toutes les poulies mobiles sont portées sur une même chape, et les poulies fixes sur une autre. Leurs centres peuvent être distribués sur diffé-

rens points de la chape, qui les porte, ou situés sur un même axe (*Voy.* les figures 46, 47). Au reste, quelque différence qu'on suppose dans ces dispositions particulières, on pourra toujours, en vertu des mêmes principes, trouver facilement le rapport de la puissance au poids ou à la résistance dans le cas de l'équilibre.

J'observe 1°. que la corde, qui embrasse toutes les poulies, est uniformément tendue dans toute sa longueur, et que sa tension t est représentée par la puissance Q appliquée à une de ses extrémités; 2°. que les poulies portées sur la mouffle immobile doivent être considérées comme des poulies de renvoi; et que par conséquent il n'y a que celles qui sont portées sur la mouffle mobile qui concourent à produire l'équilibre avec la puissance. Cela posé, s'il s'agit d'empêcher un corps d'obéir à l'action de la pesanteur, il faudra, lorsque les directions des cordons sont parallèles, que la résultante de toutes les tensions soit verticale, qu'elle passe par le centre de gravité du corps, et qu'elle soit égale au poids même du corps. Ainsi, s'il y a un nombre n de cordons aboutissans à la mouffle mobile, on aura pour l'équilibre $nQ = P$, ou $Q = \frac{P}{n}$; mais si les cordons n'étaient pas pa-

rallèles, en prenant sur chacun d'eux des parties égales pour représenter leur tension t, on la décomposerait en deux forces, l'une horizontale, l'autre verticale. La résultante des forces horizontales n'empêcherait point la chute du corps; elle pourrait produire seulement dans le système un mouvement d'oscillation, qu'il est inutile de considérer ici. Quant à la résultante des forces verticales, elle devrait être égale, comme dans le premier cas, au poids du corps, et passer par son centre de gravité. Or chacune des composantes est égale à la puissance Q multipliée par le cosinus de l'angle que fait la direction du cordon avec la verticale. Ainsi, on aura $P=Q.S$; S exprimant la somme des cosinus des angles que chacun des cordons aboutissans à la moufle mobile fait avec la verticale; c'est-à-dire que *la puissance est au poids comme l'unité est à la somme des cosinus des angles que fait chaque cordon avec la verticale.* Si on suppose les cordons parallèles, on retrouve, comme cela doit être, $P=nQ$.

Si l'obstacle qu'on veut forcer en fesant usage des moufles, n'était pas un poids, on substituerait aux angles que les cordons étaient supposés faire avec la verticale, ceux qu'ils feraient avec une droite parallèle à la direction de l'effort total de la moufle.

L'équation $Q = \frac{r}{s} . R$ trouvée ci-dessus, nous apprend que la puissance est égale à la résistance, lorsque la soustendante est égale au rayon, et qu'ensuite elle diminue, à mesure que la soustendante devient plus grande. Au reste, *la puissance et le poids tendent à parcourir, dans un instant, des espaces qui sont en raison inverse de leurs valeurs.* Car pour que le poids P (fig. 48) parcoure un petit espace vertical $II' = Tt = T't'$, il faut que la corde assujétie à passer par les deux points fixes M, M' se raccourcisse d'une certaine quantité sans cesser d'envelopper une partie de la poulie qui diffère infiniment peu de celle qu'elle enveloppait d'abord. Par conséquent, si des points t et t' on abaisse les perpendiculaires tG, $t'G'$ sur les premières directions MT, M'T', il est aisé de voir, qu'à cause des angles très-petits TMt, $T'M't'$, ce raccourcissement peut être exprimé par

$$TG + T'G' = 2TG.$$

Or les triangles semblables TGt, TIC donnent la proportion $TG : II' :: TI : r$, ou $2TG : II' :: TT' : r$, ou $:: s : r$. Or on a $Q : P :: r : s$. Donc etc.

Du Plan incliné.

65. Le *plan incliné* est celui qui fait un angle oblique avec l'horizon. Pour qu'un corps soumis à l'action d'une seule force, et qui ne touche le plan qu'en un point reste en repos, deux conditions sont indispensables : 1°. La direction de la force doit être perpendiculaire au plan; 2° elle doit passer par le point de contact, autrement le corps prendrait du mouvement, puisque la force qui agit sur lui et la résistance du plan, quand même on les supposerait égales, n'étant pas directement opposées, ne se détruiraient pas mutuellement.

Si le corps touchait le plan en deux points, il ne serait plus indispensable que la direction de la force qui agit sur lui, coïncidât avec la perpendiculaire menée sur le plan à l'un des points de contact; il suffirait qu'elle rencontrât perpendiculairement la droite qui joint les points de contact, et qu'elle fût située dans le plan déterminé par les perpendiculaires élevées par ces deux points. Il suit de là qu'un corps pesant ne peut être en repos sur un plan, à moins que celui-ci ne soit horizontal, et que la verticale, menée par le centre de gravité

ne passe par le point de contact, s'il n'y en a qu'un; et s'il y en a deux, par l'un ou l'autre de ces points, ou par la droite qui les joint. Dans ce dernier cas, l'effort total qu'exerce le corps sur le plan, se distribue de manière qu'il en résulte sur les points de contact des pressions qui sont en raison inverse de leur distance au point de rencontre de la verticale avec le plan.

Si le corps s'appuie sur trois points a, b, c non situés en ligne droite, les pressions de ceux-ci seront encore déterminées. Car, soit P la force appliquée en p (fig. 49), on peut la décomposer d'abord en deux C, D passant par c et d; ce qui donnera $P : C :: cd : pd$; ou parce que les deux triangles acb, apd ont une base commune et que leurs hauteurs sont proportionnelles à cd et à pd,

$$P : C :: abc : apb.$$

Ensuite, $P : D :: cd : cp$, d'où $D = \frac{cp}{cd}.P$; et pour déterminer les pressions A, B que D exerce en a et b, on fera la proportion

$$\frac{cp}{cd}.P : A :: ab : bd;$$

ou

$$P : A :: ab : \frac{cp}{cd}.bd;$$

et si on mène ipi' parallèlement à ab,

$$P : A :: ab : pi;$$

d'où l'on conclura, à cause que les triangles acb, cpb, qui ont même base, sont proportionnels à ab et pi;

$$P : A :: abc : cpb.$$

Par la même raison,

$$P : B :: abc : cpa.$$

Donc *les pressions en* a, b, c *sont entr'elles comme les aires des triangles opposés* cpb, cpa, bpa. D'ailleurs $P = A + B + C$. Donc *les pressions qui résultent de la force* P *en* a, b, c *sont déterminées.*

Si les trois points a, b, c étaient en ligne droite, les triangles précédens s'évanouiraient, et on n'en pourrait rien conclure par l'application des principes de la Statique; mais si le corps repose sur plus de trois points disposés ou non disposés en ligne droite, il est impossible, en suivant les lois ordinaires de la Statique, d'assigner la pression que chacun éprouve en particulier.

Venons au cas où le corps serait soumis à l'action de plusieurs forces. Quel qu'en soit le nombre, il est évident que l'équilibre ne peut

avoir lieu en vertu de la résistance du plan, qu'autant qu'elle aurait une résultante unique dont la direction lui soit perpendiculaire, et tombe, si elle ne passe pas par un des points de contact, dans l'intérieur du polygone convexe qu'on formerait en joignant ces points par des droites. Par conséquent, si le corps est sollicité au mouvement par deux forces P, P'; pour qu'il reste en repos, elles doivent être situées dans un même plan perpendiculaire au plan incliné, et avoir une résultante R dont la direction remplisse les conditions ci-dessus mentionnées. Ainsi, on aura

$$P:P':R :: \sin(P',R):\sin(P,R):\sin(P,P');$$

et la pression du plan sera représentée par la valeur de la résultante R, que nous savons déterminer.

Si l'une des forces P' est un poids, comme sa direction est une droite verticale qui passe par le centre de gravité du corps, la puissance P devra être dirigée de manière qu'elle coupe cette droite en un point d'où l'on puisse abaisser sur le plan incliné une perpendiculaire qui le rencontre conformément aux conditions prescrites pour l'équilibre. D'ailleurs deux composantes et leur résultante devant être situées dans

un même plan, il s'ensuit que le plan de leurs directions sera perpendiculaire à la fois au plan incliné et à un plan horizontal mené par un point quelconque de la verticale. Ainsi les intersections du plan des puissances avec le plan incliné et avec le plan horizontal, formeront un angle qui mesurera l'inclinaison des deux derniers; et comme tout se passe ici dans le plan vertical, il est inutile d'avoir égard à l'étendue des deux autres. Nous réduirons donc le plan incliné à un simple triangle rectangle (fig. 50) dont l'hypoténuse $AC = L$, intersection du plan vertical avec le plan incliné, sera appelée la *longueur* de ce dernier; le côté $AB = B$, intersection du premier plan avec l'horizontal, sera la *base* du plan incliné; et la perpendiculaire $CB = H$, abaissée d'un point de la première intersection sur la seconde, en sera la *hauteur*.

Cela posé, la figure du corps pesant, qui doit être retenu en équilibre sur le plan incliné, étant donnée, il sera facile d'assigner sur la verticale menée par le centre de gravité, les limites des points par où peut passer la direction de la puissance. Il suffira pour cela d'élever aux extrémités de la droite, tirée par les points les plus éloignés qui sont communs à la surface du corps et à la longueur du plan, des perpendiculaires.

La rencontre de celles-ci avec la verticale déterminera les limites demandées. Par exemple, si par les points *m*, *m'* que je suppose les plus éloignés de ceux qui sont communs à la surface du corps G (fig. 51) et à la longueur du plan, on élève les perpendiculaires *ml*, *m'l'*, leur rencontre avec la verticale *ll'* menée par le centre de gravité G du corps, déterminera l'étendue de la droite, qui comprendra tous les points que peut rencontrer la direction de la puissance dans tous les cas d'équilibre.

Lorsque la direction de P' est verticale, ce qui a lieu pour un poids quelconque, la suite des quantités proportionnelles

$$P : P' : R :: \sin(P', R) : \sin(P, R) : \sin(P, P')$$

devient (fig. 52)

$$P : P' : R :: \sin(B, L) : \sin(P, R) : \sin(P, P');$$

(B, L) désignant l'inclinaison du plan, c'est-à-dire, l'angle que fait la longueur du plan avec sa base; ou bien

$$P : P' : R :: \sin(B, L) : \cos(P, L) : \cos(P, B).$$

(P, L), (P, B) désignant les angles que fait la direction de la puissance P avec la longueur et avec la base du plan incliné. On tire de là pour

la valeur de P :

$$P = \frac{\sin(B, L)}{\sin(P, R)} . P' = \frac{\sin(B, L)}{\cos(P, L)} . P' ;$$

ce qui fait voir que pour une même inclinaison du plan, la valeur de la puissance P peut décroître depuis $P' . \frac{\sin(B,L)}{0} = \infty$, jusqu'à $P' \sin(B, L)$; l'unité ou le rayon étant la plus grande valeur qu'on puisse donner à un sinus ou à un cosinus. Dans ce dernier cas, la direction de la puissance est perpendiculaire à celle de la résultante, et parallèle à la longueur du plan. C'est la direction la plus avantageuse qu'on puisse donner à la puissance pour retenir un corps pesant en équilibre sur un plan incliné. Alors on a la proportion $P : P' :: \sin(B, L) : 1$, ou $P : P' :: H : L$; c'est-à-dire que *la puissance est au poids comme la hauteur du plan incliné est à sa longueur*. Mais si la direction de la puissance était parallèle à la base, la proportion se changerait en celle-ci : $P : P' :: H : B$; et dans ce cas *la puissance serait au poids comme la hauteur du plan à sa base.*

On tire de la proportion trouvée ci-dessus l'égalité :

$$\sin(P, R) = P' . \frac{\sin(B, L)}{P} ;$$

d'où l'on peut conclure que l'inclinaison du plan restant la même, on peut donner à la puissance P, sans troubler l'équilibre, deux directions différentes; car on sait qu'un même sinus appartient à deux angles, qui sont supplément l'un de l'autre. Mais il faut remarquer que le changement dans la direction de la puissance en introduit un en même temps dans la pression du plan, comme l'indique évidemment la valeur de R, ou l'équation

$$R = \frac{\sin (P, P')}{\sin (B, L)} . P.$$

On déterminera avec la même facilité les changemens qui peuvent résulter de la variation de l'angle que le plan fait avec l'horizon.

On voit aussi que si on décomposait la résultante en deux forces, l'une verticale, l'autre horizontale, on obtiendrait les efforts exercés perpendiculairement et parallèlement à la base du plan.

Pour qu'un corps soumis à la seule action de la pesanteur soit retenu en équilibre entre deux plans inclinés, il faut qu'il y ait sur la verticale, qui passe par son centre de gravité, au moins un point d'où l'on puisse abaisser sur ces plans des perpendiculaires qui remplissent sur chacun

d'eux les conditions ci-dessus mentionnées. Alors le plan vertical, qui passe par le centre de gravité du corps, étant perpendiculaire en même temps aux deux plans inclinés, il s'ensuit que l'intersection de ceux-ci se trouve dans un plan horizontal. Il est donc impossible qu'un corps pesant soit en équilibre entre deux plans, si leur intersection commune n'est pas une ligne horizontale. Dans ce cas, les deux plans pourront évidemment être représentés par les droites $ca = L$, $c'a = L'$ (fig. 53) menées dans ces plans perpendiculairement au même point a de leur intersection commune. On déterminera les hauteurs et les bases de chacun d'eux, en abaissant sur l'horizontale bb' les perpendiculaires cb, $c'b'$. Cela posé, soient E, E' les pressions des deux plans, on aura le poids du corps, ou

$$P' : E : E' :: \sin EP'E' : \sin RP'E' : \sin RP'E,$$

ou bien

$$P' : E : E' :: \sin(L, L') : \sin(B', L') : \sin(B, L).$$

On voit par là que si le poids du corps est représenté par le sinus de l'angle que font entr'eux les deux plans inclinés, *les pressions* E, E' *sont entr'elles réciproquement comme les sinus des angles qu'ils font avec l'horizon.*

Pour

Pour faire encore quelque application des propositions précédentes, supposons un corps pesant en repos sur un plan incliné *ac* au moyen d'une corde fixée à l'une de ses extrémités *t* et retenue par une puissance Q, qui empêche le corps de glisser le long du plan incliné (fig. 54). Soit T la tension du cordon *t*T; on aura T=Q (64); et, en désignant par P la résultante des deux tensions; Q:P :: sin (T,P):sin (T,Q); d'ailleurs, P:P′ :: sin (B, L) : cos (Q, L). Donc, en général on aura

$$Q : P' :: \frac{\sin(T, P)}{\sin(T, Q)} . \sin(B, L) : \cos(Q, L).$$

Si les directions des cordons sont parallèles, comme on a alors (64) $\frac{Q}{P} = \frac{1}{2}$, on aura aussi $\frac{\sin(T, P)}{\sin(T, Q)} = \frac{1}{2}$; et par conséquent,

$$Q = \frac{P'}{2} . \frac{\sin(B, L)}{\cos(Q, L)}.$$

Ce qui nous apprend que pour l'équilibre, *la puissance ne doit être que la moitié de ce qu'elle serait, si elle n'était pas favorisée par le concours de la corde qui retient le corps.*

Quant à la pression qu'éprouve le plan dans ce cas-ci, il sera facile de la déterminer d'après les principes exposés auparavant.

Enfin, supposons deux poids P, P′ (fig. 55) attachés aux extrémités d'une corde STS′ passant par-dessus une poulie de renvoi T et retenus en équilibre sur deux plans adossés l'un à l'autre, dont les longueurs et les bases respectives soient représentées par L, L′; B, B′; on demande les conditions de l'équilibre. D'abord, si rien n'empêche la corde de glisser sur l'arête que forme l'intersection commune des deux plans, il est évident que cette intersection doit être horizontale; ensuite, en vertu des principes exposés ci-dessus, on aura, en désignant par T la tension de la corde,

$$P : T :: \cos(P,\ L) : \sin(B, L),$$
$$T : P' :: \sin(B', L') : \cos(P', L');$$

d'où il sera facile de conclure le rapport de P à P′; et si les deux cordons sont parallèles aux longueurs des plans, on aura

$$P : P' :: \sin(B', L') : \sin(B,\ L);$$

c'est-à-dire que *les poids doivent être en raison inverse des sinus des angles que font avec l'horizon les plans qui les soutiennent.*

Je ne m'arrête point à déterminer les pressions des deux plans, parce que cette détermination ne peut plus présenter aucune difficulté.

Remarquons avant de finir, que si du pied

de la perpendiculaire GR (fig. 56) abaissée du point de concours G sur la longueur du plan, on mène les perpendiculaires Rr, Rr' aux directions des puissances P, P′, et qu'on regarde le point R comme l'appui d'un lévier coudé rRr'; les puissances tendent à décrire dans le même instant autour des points r, r' de petits arcs de cercle proportionnels à leurs rayons Rr, Rr'; mais ces rayons sont entr'eux comme les sinus des angles qui leur sont opposés. Donc *le petit espace* e *que tend à décrire la puissance* P *est à l'espace* e′ *que tend à décrire le poids* P′ :: sin (P, R) : sin (P′, R), *ou en raison inverse de leurs intensités.*

Du Treuil.

66. La pièce principale du *tour, treuil* ou *cabestan* est un cylindre mobile autour de son axe, et sur lequel peut s'envelopper par l'une de ses extrémités une corde qui porte à son autre extrémité un poids retenu en équilibre ou mis en mouvement par une puissance quelconque dirigée de manière à pouvoir faire tourner la machine autour de son axe. Pour faciliter ce mouvement de rotation, on garnit le cylindre à ses deux bases de deux tourillons qui portent sur des appuis immobiles et capables de résister aux efforts qu'ils doivent soutenir.

Ordinairement, surtout lorsque la résistance à vaincre n'est pas considérable, il suffit d'adapter aux extrémités du cylindre des manivelles que des hommes font tourner par la force de leurs bras. Quelquefois on implante dans le corps de la pièce principale, et perpendiculairement à son axe, des léviers ou barres destinées au même usage que les manivelles. Dans d'autres circonstances, on assemble solidement avec le cylindre un tambour plus ou moins grand, dans lequel peuvent marcher des hommes ou des animaux qui, par leur propre poids font tourner le cylindre et le tambour autour de leur axe commun. Des hommes pourraient aussi produire le même effet en marchant et s'appuyant sur des chevilles attachées aux jantes d'une roue fesant corps avec le cylindre. Enfin on pourrait employer une roue dont la circonférence creusée en gorge comme une poulie, serait enveloppée par une corde que tirerait une puissance quelconque pour établir l'équilibre, ou pour communiquer à la machine un mouvement de rotation.

Les dénominations de la machine que nous considérons sont relatives à son objet et même à sa position. Dans le *treuil* l'axe est horizontal; on l'appelle autrement *tour;* mais cette dernière

dénomination paraît plutôt un terme générique qui convient à la machine, quelle que soit la direction de l'axe. Lorsque le cylindre est vertical, et qu'on se sert de barres horizontales pour mettre le corps en mouvement, on l'appelle *cabestan*.

Quelle que soit la manière dont la puissance agit sur la machine, on voit que les efforts du poids et ceux de la puissance sont dirigés dans deux plans parallèles entr'eux, ou au moins sensiblement parallèles. Il s'agit à présent de déterminer les effets qui doivent en résulter sur les appuis, après avoir établi les conditions de l'équilibre. Réduisons en conséquence toute la machine à ce qu'elle présente d'absolument nécessaire pour la recherche que nous avons en vue. Ainsi AA′ (fig. 57) représentera l'axe du cylindre, C′ le centre de la section circulaire faite par un plan perpendiculaire à sa longueur, et passant par la direction du poids P′; C le centre de la section de la roue faite par un autre plan parallèle au premier et passant par la direction de la puissance; M est le milieu de la droite qui sépare les deux sections; enfin je représenterai par r et r' les rayons de la roue et du cylindre.

Cela posé, décomposons l'effort du poids P′

en deux autres, l'un passant par le point M et l'autre dirigé dans le plan de la section de la roue. Le premier égal à $2P'$ sera détruit par la résistance de l'axe, et le second égal à $-P'$ devra être contrebalancé par l'effort de la puissance P. Il faut donc que la résultante de ces derniers passe par l'appui C (60), et que par conséquent la somme de leurs momens pris par rapport à ce point soit nulle. Mais le moment de la force $-P' = -P'r'$; car les intersections communes C'T', CS avec le plan horizontal C'T'M prolongé, sont évidemment deux droites égales et parallèles. On aura donc pour l'équilibre :

$$P.r - P'.r' = 0; \quad \text{ou} \quad P.r = P'.r';$$

ce qui donne la proportion : *la puissance est au poids, comme le rayon du cylindre est au rayon de la roue;* résultat qui s'accorde avec ce qui a été dit (43).

On aura l'attention de prendre pour r et pour r' les rayons de la roue et du cylindre augmentés, s'il y a lieu, de ceux des cordes qui les enveloppent; car la puissance et le poids exercent évidemment leur action suivant l'axe de la corde à laquelle ils sont appliqués.

67. *Remarque.* L'équation précédente expri-

merait de même les conditions de l'équilibre entre les puissances P et P′, si elles étaient situées l'une et l'autre dans un même plan parallèlement à leurs premières directions et à des distances de l'axe respectivement égales aux premières. Elle aurait encore lieu, quand même on supposerait la force tangentielle P appliquée à un autre point de la circonférence de la roue; d'où l'on peut conclure que l'effet d'une force quelconque dirigée tangentiellement à la circonférence d'un cercle, est le même, quant au mouvement de rotation qu'elle tend à produire autour d'un axe, quel que soit le point d'application sur cette circonférence.

Pour avoir la charge des appuis A, A′, on observera que la résultante des forces P et—P′ peut être remplacée par ses composantes appliquées l'une et l'autre suivant leurs premières directions au centre C de la roue. Donc, 1°. la puissance P doit produire sur les appuis le même effet que si elle avait été transportée parallèlement à elle-même au point C. Ensuite les forces parallèles — P′ et 2P′ dont l'une passe par le point C et l'autre par le point M, équivalent à une force unique P′ appliquée en C′. Donc, 2°. le poids P′ exerce aussi sur les appuis la même action que s'il avait été appliqué en C′. On dé-

composera donc les puissances P, P′, comme si elles avaient été transportées sur l'axe parallèlement à elles-mêmes, chacune en deux autres passant par les appuis A, A′; et si on veut avoir égard en même tems, comme cela est nécessaire, au poids du cylindre et à celui de la roue, on considérera ces poids comme de nouvelles forces verticales, dont on trouvera facilement la position; et après avoir fait une décomposition semblable aux premières, il ne restera plus qu'à déterminer la valeur et la direction des forces résultantes de celles qui passent par les appuis.

Il est visible que dans le treuil les espaces que les puissances tendent à décrire dans un instant, sont comme les rayons, aux extrémités desquels elles sont appliquées, et par conséquent en raison inverse de ces mêmes puissances.

Nous ne parlerons point ici des conditions de l'équilibre, lorsque plusieurs puissances et plusieurs poids sont appliqués à un tour, parce que cette question a été suffisamment éclaircie, lorsque (43) on a parlé de l'équilibre d'un système de forces quelconques autour d'un axe immobile.

Du Cric.

Le *cric simple*, que nous considérons d'abord, est composé d'une barre mobile dans une châsse et garnie à l'une de ses faces de dents qui engrènent avec celles d'une petite roue ou *pignon* qu'on fait tourner autour de son axe au moyen d'une manivelle. Il peut résulter de ce mécanisme, suivant la longueur de la barre, un effort considérable, propre par conséquent à soulever des corps d'autant plus pesans, que le rayon de la manivelle surpasse celui de la roue; car il est visible que l'équilibre a lieu, comme dans le treuil, lorsque *la puissance est à la résistance comme le rayon de la roue est à celui de la manivelle.*

Le *cric composé* diffère du cric simple seulement en ce qu'on emploie dans celui-là plus d'un pignon. Sa théorie rentre dans celle des roues dentées que nous allons exposer.

Nous ne parlerons point d'autres machines, telles que la *grue*, etc., qui se rapportent au treuil, par la raison que les recherches qui leur sont relatives, n'offrent à présent aucune difficulté.

Des Roues dentées.

68. Les *roues dentées* sont terminées à leur circonférence par des parties également espacées, qu'on appelle *dents*, à l'aide desquelles elles engrènent les unes avec les autres et se transmettent l'action d'une puissance quelconque. Ces sortes de roues sont d'un très-grand usage. Ordinairement on réunit sur un même arbre et dans des plans différens une grande roue et une petite. Celle-ci prend alors le nom de *pignon*, dont les dents ou *ailes* engrènent avec les dents d'une autre roue.

Dans les grandes machines les pignons sont remplacés le plus souvent par des *lanternes*, qui ne sont rien autre chose que des cylindres assemblés parallèlement entr'eux dans des plateaux. Comme l'action de la force motrice se transmet de la même manière dans ces deux cas, nous nous contenterons d'examiner l'engrenage des roues et des pignons. Supposons donc une puissance P appliquée tangentiellement à la circonférence d'une roue (fig. 58) qui porte un pignon dont les ailes engrènent avec les dents d'une seconde roue, qui porte de même un pignon dont les ailes engrènent à leur tour avec les dents d'une troisième roue. Concevons la

même combinaison jusqu'à la roue au pignon de laquelle est suspendu le poids P′, qu'il s'agit de retenir en équilibre ou de faire mouvoir. Soient R, r; R′, r'; R″, r'', etc., les rayons des roues et des pignons de chaque assemblage; et désignons par E, E′, E″, etc., les efforts que les dents et les ailes, qui se rencontrent, exercent les unes contre les autres; nous aurons les proportions suivantes :

$$P : E :: r : R,$$
$$E : E' :: r' : R',$$
$$E' : P' :: r'' : R'';$$

d'où nous conclurons, par la multiplication,

$$P : P' :: r.r'.r'' : R.R'.R'',$$

c'est-à-dire que *la puissance est au poids comme le produit des rayons des pignons est à celui des rayons des roues.*

On peut énoncer autrement le rapport de la puissance au poids pour qu'il y ait équilibre, en disant qu'il doit être composé du rapport du rayon du dernier pignon au rayon de la première roue et du rapport du nombre de révolutions du dernier pignon, au nombre de révolutions de la première roue faites dans le même tems. En effet, la proportion trouvée ci-dessus donne $\frac{P}{P'} = \frac{r''}{R} \cdot \frac{r.r'}{R'.R''}$. Or le nombre des ailes du

premier pignon étant au nombre des dents de la seconde roue, dans le rapport de leurs circonférences ou de leurs rayons, on voit clairement que la première roue ou son pignon fait un tour, tandis que la seconde en fait $\frac{r}{R'}$. De même, tandis que la seconde roue ou son pignon fait un tour, la troisième en fait $\frac{r'}{R''}$, et par conséquent cette dernière en fait $\frac{r.r'}{R'.R''}$, tandis que la première en fait un. Ainsi le rapport des nombres de tours faits en même temps par le dernier pignon et la première roue $= \frac{r.r'}{R'.R''}$; ce qui fait voir la vérité du dernier énoncé.

Il suit de ce qui précède, 1°. qu'un poids étant donné, en le multipliant par le produit des rayons des pignons et divisant le résultat par le produit des rayons des roues, on a la puissance qui peut soutenir le poids. Ainsi en multipliant convenablement le nombre des roues, une puissance médiocre peut faire équilibre à un poids considérable. Il est vrai qu'en multipliant le nombre des roues, on augmente le frottement, ce qui peut contrebalancer l'avantage que cette multiplication semble présenter.

2°. Qu'en multipliant la puissance par le pro-

duit des rayons des roues, et divisant le tout par le produit des rayons des pignons, on a pour quotient le poids que la puissance peut soutenir.

3°. Que la puissance et le poids étant donnés, on peut trouver le nombre des roues, et assigner le rapport qui doit exister entre le rayon de chacune et celui du pignon qu'elle porte, pour que la puissance appliquée à la première circonférence soutienne le poids. On divisera le poids par la puissance, et on décomposera le quotient en ses facteurs; le nombre de ces facteurs sera celui des roues; et les rayons des pignons comparés à ceux des roues devront être dans le même rapport que l'unité à ces différens facteurs. Qu'on ait, par exemple, un poids de 5000 et une puissance de 40, il vient au quotient $125 = 5.5.5$. On pourra donc employer trois roues dans chacune desquelles le rayon du pignon devra être à celui de la roue comme 1 à 5.

On trouvera sans peine actuellement le rapport des espaces parcourus en même tems par la puissance P et par le poids P'. Car si nous exprimons par S, s; S', s'; S'', s'' les espaces parcourus en même tems par un point pris séparément sur les circonférences de la première roue et du premier pignon; de la seconde roue et du second

pignon; de la troisième roue et du troisième pignon, nous aurons les proportions suivantes :

$$S : s :: R : r;$$

et à cause de $s = S'$

$$s : s' :: R' : r';$$

par la même raison on aura

$$s' : s'' :: R'' : r'';$$

et, en multipliant par ordre, il viendra

$$S : s'' :: R.R'.R'' : r.r'.r'';$$

ce qui nous apprend que *les espaces parcourus par les puissances dans le même tems sont entre eux réciproquement comme ces mêmes puissances.*

Avant de finir cet article, nous allons enseigner la manière de déterminer les nombres de dents et d'ailes que doivent avoir plusieurs roues et plusieurs pignons qui engrènent ensemble, pour faire dans un tems déterminé un nombre de révolutions données.

Quoique ce problème n'appartienne pas proprement à la Statique, nous avons jugé à propos de le résoudre ici à cause de sa grande utilité

dans la construction des machines, principalement dans l'horlogerie.

Supposons quatre roues dentées disposées de manière que la première engrène avec le pignon fixé à la seconde; que celle-ci engrène avec le pignon fixé à la troisième; ainsi de suite. Nommons A, A′, A″, A‴ les nombres de dents des quatre roues, et a, a', a'', a''' les nombres d'ailes des quatre pignons. De plus, désignons par N, N′, N″, N‴ les nombres de tours que les quatre roues font en même tems; ceux des trois premiers pignons, qui font corps respectivement avec la seconde, la troisième et la quatrième roue, seront représentés par N′, N″, N‴; et nous appellerons N^{IV} le nombre de tours que fera en même tems le quatrième pignon. Cela posé, il est clair que le nombre de dents de la première roue, engrenées pendant un tour, étant $=A$, le nombre de dents engrenées pendant un nombre N de tours $=NA$. De même, le nombre d'ailes du premier pignon engrenées pendant le nombre N′ de tours $=N'a$. Mais il y a autant de dents engrenées d'une part que d'ailes engrenées de l'autre; donc $NA=N'a$, ou

$$N : N' :: a : A;$$

De même,

$$N' : N'' :: a' : A',$$
$$N'' : N''' :: a'' : A'',$$
$$N''' : N^{IV} :: a''' : A''';$$

et, en multipliant ces proportions par ordre, on tirera la suivante:

$$N : N^{IV} :: a . a' . a'' . a''' : A . A' . A''A''',$$

laquelle nous apprend que *la quantité de tours que font en même tems la première roue et le dernier pignon est en raison du produit des nombres d'ailes des pignons à celui des nombres de dents des roues.*

Pour faire une application de ce que nous venons de dire, ne prenons que trois roues et trois pignons, et cherchons les nombres de dents et d'ailes qu'ils doivent avoir respectivement pour que la première roue fesant un tour en un an, le dernier pignon en fasse un en douze heures. L'année étant de 365 jours 5 heures 49 minutes ou de $8765 \frac{49}{60}$ heures; en divisant $8765 \frac{49}{60}$ par 12, on aura $\frac{N'''}{N} = 730 \frac{349}{720}$; et par conséquent $A . A' . A'' = 730 \frac{349}{720} . a . a' . a''$. Le produit $A . A' . A''$ étant un nombre entier, on pourra faire $a . a' . a' = 720$; nombre dont les facteurs 8, 9, 10 sont propres à déterminer la quantité d'ailes

d'ailes qu'on doit donner aux pignons. Mais cette supposition entraîne un inconvénient, en ce que $A.A'.A''$ devant être égal à 525949, ce dernier nombre n'est pas décomposable en trois facteurs propres à donner les nombres de dents des trois roues. Il faudra donc y remédier, en cherchant par approximation ce que le calcul ne peut donner exactement.

Puisque la question exige que $\frac{349}{720}.a.a'.a''$ soit un entier, voyons si en le diminuant d'une quantité très-petite $\frac{d}{720}$, nous pourrons arriver au but. Posons donc $\frac{349}{720}(a.a'.a'') - \frac{d}{720} = E$; ou... $a.a'.a'' = \frac{720E+d}{349}$. En fesant les calculs nécessaires, conformément à ce qui est enseigné en Algèbre, on verra qu'il faut satisfaire aux deux équations

$$a.a'.a'' = 720E' + 229d,$$

et

$$A.A'.A'' = 525949E' + 167281d;$$

en négligeant dans la dernière la fraction $\frac{d}{720}$, qui ne sera d'aucune conséquence.

On est le maître à présent de donner à E' et à d les valeurs qu'on voudra. On trouvera, après plusieurs essais, que celles qui réussissent don-

nent $a.a'.a''=196=4.7.7$ et .... $A.A'.A''=143175=25.69.83$. Ainsi le problème sera résolu, si on prend trois pignons de 7, 7, 4 ailes et trois roues de 83, 69, 25 dents; disposant d'ailleurs le tout comme on voudra.

Nous avons dit que la fraction qui a été rejetée, ne causerait aucune erreur sensible; c'est ce dont on peut se convaincre en cherchant par les formules précédentes, combien de tours la roue et le pignon peuvent faire en même temps. On trouvera que si le pignon fait un tour en douze heures, la roue en fait un en $12.\frac{143175}{196}$ heures, ou 365 jours 5 heures $48' \frac{48}{49}$. Ainsi le problème est résolu à $\frac{1}{49}$ de minute près.

Remarque. Dans quelques machines, qui peuvent se rapporter de même au treuil, l'action de la force motrice est variable. Alors, si la résistance à vaincre est constante, la force doit être appliquée à des bras de lévier dont la longueur devienne plus ou moins grande à mesure que son intensité diminue ou augmente. Tel est le mécanisme des montres ordinaires. Le principe moteur est un ressort plié spiralement sur lui-même dans un barillet AB (fig. 59), qui est traversé par un arbre immobile CD, autour

duquel il a la liberté de tourner. Ce ressort est fixé par l'un de ses bouts à l'arbre, et par l'autre, à la surface concave du barillet; une chaîne EFG est arrêtée au barillet par l'une de ses extrémités et par l'autre à une fusée MN de forme conique, traversée quarrément par un arbre OP, qui fait corps avec elle. Pour monter la montre, on fait tourner la fusée par le moyen d'une clé qu'on applique à la tête O de l'arbre. La chaîne en s'enveloppant sur la fusée fait tourner dans un sens le barillet autour de son axe retenu par une roue d'arrêt. Par ce mouvement, le ressort se tend, en se pliant autour du même axe, de manière que sa plus grande tension a lieu lorsque la chaîne répond au plus petit diamètre de la fusée. Quand la montre est montée entièrement, on retire la clé, l'action du ressort spiral fait tourner en sens contraire le barillet, ainsi que la fusée et une roue RN fixée à la base de celle-ci, transmet le mouvement à tout le rouage dont la montre est composée. On voit par là qu'à mesure que le ressort se déploie et perd sa force, la chaîne est appliquée à des distances plus grandes de l'axe de la fusée; ce qui produit une compensation, et fait que le moment de la force motrice reste toujours à peu près le même.

Nous ne nous étendrons pas davantage sur

ce dernier objet, qui nous est en quelque sorte étranger, et nous renvoyons aux Traités d'horlogerie, qui donneront tous les détails qu'on pourra desirer.

De la Vis.

69. La *vis* est un cylindre droit, tel que AB (fig. 60), creusé en forme de spirale. On peut concevoir que sa génération se fait par le mouvement uniforme d'une ligne droite glissant autour de la surface du cylindre parallèlement à son axe, tandis qu'un point I placé sur cette droite descend aussi uniformément. La courbe décrite par ce double mouvement, se nomme *hélice*. Comme un cylindre peut être creusé intérieurement ou en dehors, on distingue deux sortes de vis. La vis proprement dite est celle dont la surface creusée est convexe, et celle dont la surface creusée est concave, se nomme communément *écrou*. Ces deux espèces de vis sont toujours jointes l'une à l'autre, toutes les fois qu'on veut s'en servir comme d'une puissance mécanique. Tantôt la vis est mobile et l'écrou est fixe; tantôt au contraire c'est l'écrou qui est mobile, et la vis est fixe; mais dans ces deux cas l'effet est toujours le même. La cloison qui sépare les tours de la gorge de la vis se nomme le *filet de la vis;* la distance d'un filet à l'autre, estimée

parallèlement à l'axe, est *le pas de la vis*; et la partie du filet comprise entre les extrémités de la droite, qui mesure la hauteur du pas de la vis, se nomme *spire*. Il est visible que le filet d'une vis n'est rien autre chose qu'un plan incliné roulé en spirale autour d'un cylindre, et que l'inclinaison de ce plan est d'autant plus petite que la hauteur des pas de vis est moins grande. Ainsi, lorsqu'une vis tourne dans son écrou, on peut regarder ces deux pièces comme deux plans inclinés dont l'un glisse sur l'autre. La hauteur est déterminée pour chaque tour, par la distance d'un filet à l'autre, la longueur par celle de la spire correspondante, et la base par la circonférence du cylindre; car il est évident que si on développe un filet de la vis avec son pas, on aura un plan incliné. Ce développement forme un prisme triangulaire ou un prisme quadrangulaire, suivant que les filets sont angulaires ou carrés; car on leur donne ces différentes formes selon les efforts qu'ils ont à soutenir, et la matière dont les vis sont composées. Cette machine est d'un grand usage; on peut l'employer pour élever des poids, ou surmonter des obstacles, mais plus ordinairement pour exercer des pressions. On applique pour cela la puissance à l'extrémité d'une barre qui tra-

verse l'écrou ou la tête de la vis, selon que l'une ou l'autre de ces deux pièces est mobile; alors la puissance fesant tourner la pièce à laquelle elle est appliquée, fait avancer l'écrou vers la tête de la vis, ou réciproquement; ce qui donne lieu à ces deux pièces de comprimer fortement les objets placés entr'elles.

Il s'agit maintenant, toujours abstraction faite du frottement, de trouver le rapport de la puissance Q à la résistance P, qui lui fait équilibre, en s'opposant au mouvement de la pièce mobile parallèlement à l'axe de la vis. Comme il est indifférent pour la détermination de l'équilibre laquelle des deux pièces est mobile, nous supposerons que c'est l'écrou qui tourne.

Supposons donc la vis immobile et dans une situation verticale; concevons l'écrou abandonné à l'action de la pesanteur, et chargé même d'un poids étranger, qui peut être considéré comme fesant une masse commune avec lui. Il est évident qu'il descendra en tournant, et qu'il parcourra les filets inférieurs de la vis en glissant comme sur un plan incliné. Pour s'opposer à cet effet, il suffira d'empêcher l'écrou de tourner autour de la vis, et pour cela on appliquera perpendiculairement à la barre qui le traverse, une puissance qui soit de plus dirigée

dans un plan perpendiculaire à l'axe. Comme le poids entier de l'écrou ne porte pas sur un seul point du filet, mais sur plusieurs à la fois, il faudra le concevoir divisé en autant de parties qu'il y a de points de l'écrou qui s'appliquent sur ceux du filet, et imaginer en outre la puissance Q partagée en un égal nombre de puissances partielles q, q', q'', q''', etc. propres à contrebalancer l'effet des poids partiels correspondans p, p', p'', p'''.

Soit donc p un de ces poids, que je suppose reposer sur le point I, distant de la vis d'une quantité $=r$. Si on imagine par ce point une tangente tIt', il est clair qu'on pourra supposer le poids p comme placé sur un plan incliné dont la hauteur $=h$ serait celle du pas de la vis, la longueur égale à la longueur de la spire correspondante et la base égale à circ. r. Or, si on conçoit une puissance π appliquée au point I parallèlement à la base du plan, on devra avoir pour l'équilibre (65) $\pi : p :: h : \text{circ.}\, r$, ou $\pi = \frac{ph}{\text{circ.}\, r}$. Si en prolongeant r on suppose que le prolongement rencontre le point d'application de la force Q à une distance R, et si on décompose la force π en deux autres parallèles, l'une π' passant par le point d'application, et l'autre π'' passant par l'axe; celle-ci sera évidem-

ment détruite par la résistance de l'axe, et l'autre π', qui aura pour expression (10) $\frac{\pi \text{ circ. } r}{\text{circ. R}} = \frac{ph}{\text{circ. R}}$ devra faire équilibre à la force q; on aura donc $q = \frac{ph}{\text{circ. R}}$. Mais on a remarqué (67) que des forces appliquées tangentiellement à des circonférences de cercles situés ou non situés dans un même plan, produisent le même effet, quant au mouvement de rotation autour d'un axe; d'ailleurs on vient de voir que la distance r à l'axe de la vis n'entre nullement dans l'expression de q; il s'ensuit donc que pour les autres points on aura une expression analogue à la précédente; ce qui donnera cette suite d'équations :

$$q = \frac{p.h}{\text{circ. R}},$$

$$q' = \frac{p'.h}{\text{circ. R}},$$

$$q'' = \frac{p''.h}{\text{circ. R}},$$

etc.

Mais $q + q' + q'' + \text{etc.} = \text{Q}$; et.......... $p + p' + p'' + \text{etc.} = \text{P}$. Donc $\text{Q} = \frac{\text{P}.h}{\text{circ. R}}$, d'où l'on tire, 1°. la proportion $\text{Q} : \text{P} :: h : \text{circ. R}$; ou *la puissance est à la résistance comme la hauteur*

du pas de vis est à la circonférence qui aurait pour rayon la distance du point d'application de la puissance à l'axe de la vis. 2°. Cette conséquence : *La puissance aura d'autant plus d'avantage, que les spires seront plus serrées, et qu'elle agira à l'extrémité d'un lévier plus long.*

On remarquera que tandis que l'écrou parcourt la hauteur d'un pas de vis, le point auquel la puissance est appliquée, décrit perpendiculairement autour de l'axe du cylindre un espace $=$ circ. R.

Cette machine, ainsi que les autres, fait donc perdre en tems ce qu'on gagne en force.

De la Vis sans fin.

La vis ordinaire est quelquefois employée pour communiquer à une roue dentée un mouvement de rotation, à l'aide duquel il s'agit d'élever un poids ou de vaincre une résistance quelconque. Pour produire cet effet, après avoir donné au pas de vis une hauteur égale à l'une des divisions de la roue, on a soin de disposer la machine de manière que l'axe de la vis soit dans le plan de la roue, et que son filet engrène avec les dents. Si une puissance Q, à l'aide d'une manivelle ou autrement, fait tourner la vis, il est clair que son filet exerce successivement contre les dents et parallèlement à l'axe, une

pression propre à contrebalancer l'effort que le poids ou la résistance exerce sur l'arbre de la roue. La machine ainsi construite, s'appelle *vis sans fin*. On lui donne ce nom parce qu'elle fait tourner perpétuellement la roue dentée, et que la vis elle-même peut tourner, sans jamais finir, au lieu qu'on ne peut faire faire aux vis ordinaires qu'un certain nombre de tours.

Cela posé, désignons (fig. 61) par e l'effort qu'en vertu du mouvement de rotation imprimé à la vis le filet exerce parallèlement à l'axe contre une des dents de la roue, par h la hauteur d'un pas de vis, R le rayon de la circonférence que la puissance Q tend à décrire, par R′ le rayon de la roue dentée, et par r celui de son arbre; on aura;

$$1^{\circ}.\quad Q : e :: h : \text{circ. } R\,;$$

et, parce que l'effort e peut être considéré comme une puissance appliquée perpendiculairement à l'extrémité du rayon R′;

$$2^{\circ}.\quad e : P :: r : R'.$$

Donc

$$Q : P :: h.r : R'.\text{ circ. } R\,,$$

c'est-à-dire, que l'équilibre a lieu dans la vis sans fin, lorsque *la puissance est au poids comme le*

produit du pas de vis par le rayon de l'arbre de la roue est à celui du rayon de la roue par la circonférence que décrirait le point d'application de la puissance; ou, parce que............
$\frac{Q}{P} = \frac{\text{circ. } r}{\text{circ. R}} \cdot \frac{h}{\text{circ. R}'}$; on pourra dire que *la puissance appliquée à la manivelle est à la résistance en raison composée de la circonférence de l'arbre de la roue à la circonférence décrite par la puissance, et des révolutions de la roue aux révolutions de la vis.*

On verra encore aisément que *les espaces parcourus en même tems par le poids et par la puissance, sont en raison inverse de leurs valeurs.*

Du Coin.

70. Le *coin* est la dernière machine simple dont on s'occupe en Statique. Tout le monde sait que sa figure est celle d'un prisme triangulaire ABCDFE (fig. 62). Les côtés des triangles ABE, DCF, qui forment deux faces opposées, sont sensiblement plus grands que leur base; ce qui rend plus tranchante l'arête EF, qui joint les sommets de ces triangles. La face opposée ABCD se nomme la base ou la tête du coin; les parallélogrammes ADFE, BCFE, qui par leur intersection forment l'arête tranchante, ou ce

qu'on appelle simplement le *tranchant* du coin, en sont les côtés; et une perpendiculaire abaissée du tranchant sur la tête, en serait la hauteur.

On se sert tous les jours du coin pour fendre un corps quelconque, en le fesant entrer par son tranchant entre les parties adhérentes qu'on veut écarter ou séparer l'une de l'autre. On l'emploie aussi pour exercer de grandes pressions ou de fortes tensions.

Le corps à fendre étant en repos sur un plan immobile, nous supposerons que la puissance Q est appliquée perpendiculairement sur la base du coin; car autrement elle se décomposerait en deux, l'une dirigée suivant le plan de la base, qui ne contribuerait en rien à l'enfoncement du coin, et l'autre perpendiculaire à ce même plan, la seule qui puisse produire l'effet qu'on a en vue.

Puisqu'il s'agit ici de vaincre la résistance des parties adhérentes du corps, il est nécessaire qu'il y ait sur la direction de la puissance Q un point D (fig. 63), d'où l'on puisse abaisser des perpendiculaires sur les côtés du coin aux points par lesquels ils s'appuient sur les parties du corps qu'on veut fendre. Ainsi, en représentant par π et π' les pressions DE, DF, que la force Q produit sur les appuis S, S'; et considérant

que la puissance Q et ses deux composantes DE, DF sont respectivement perpendiculaires à la base AB, et aux côtés BC, AC du triangle ABC, qui représente le profil du coin; on aura

$$Q : \Pi : \Pi' :: AB : BC : AC,$$

ou

$$Q : \Pi + \Pi' :: AB : BC + AC.$$

Mais parce que les côtés AB, BC, AC du triangle ABC sont dans le même rapport que la base et les faces du coin qu'il représente; que d'ailleurs les pressions sont supposées détruites par des résistances égales et directement opposées, nous en conclurons que dans le cas de l'équilibre, *la force imprimée perpendiculairement à la tête du coin est à la somme des résistances que les parties du corps à fendre opposent à son action comme la tête du coin est à la somme de ses côtés.*

On voit par là que plus le coin sera tranchant, plus la puissance aura de facilité à l'enfoncer. Au reste, les parties dont les différens corps sont composés, étant plus ou moins adhérentes entr'elles, et leurs fibres plus ou moins flexibles, on conçoit que la théorie du coin considérée sous le point de vue sous lequel nous venons de l'envisager, est peu susceptible de quelque précision.

On a coutume de rapporter au coin tous les instrumens tranchans et perçans, tels que les *ciseaux*, les *poinçons*, etc.

Considérons à présent le coin comme destiné à exercer des pressions ou des tensions suivant des directions déterminées. Les côtés BC, AC sont toujours proportionnels aux pressions π, π'. On peut prendre pour exprimer celles-ci des droites SK, S'K' qui soient égales à ces côtés et même entr'elles, si le triangle ABC est isoscèle. Si ensuite on décompose ces dernières chacune en deux autres, l'une perpendiculaire et l'autre parallèle au plan immobile VX, les droites SM, S'M' représenteront les pressions que la force Q occasionne sur ce plan; et les droites SL, S'L' les efforts exercés parallèlement à ce même plan. Soient donc t, t' ces efforts, on aura

$$\pi : t :: SK = BC : SL;$$

mais

$$Q : \pi :: AB : BC;$$

donc

$$Q : t :: AB : SL.$$

On trouvera semblablement

$$Q : t' :: AB : S'L'.$$

On aura donc cette suite de proportionnelles :

$$Q : t : t' :: AB : SL : S'L' ;$$

d'où nous tirerons

$$Q : t+t' :: AB : SL+S'L'.$$

Supposons donc enfin la tête du coin parallèle au plan immobile VX, et soit imaginée une perpendiculaire menée du tranchant I sur la tête du coin, on aura des triangles rectangles qui, ayant leurs côtés perpendiculaires et leurs hypoténuses égales par construction, seront équiangles et parfaitement égaux. Ainsi le triangle ABC étant supposé isoscèle, on aura SL=S'L'= à la hauteur *h* du coin; et la dernière proportion se changera en celle-ci :

$$Q : t+t' :: AB : 2h$$

ou

$$Q : t :: AB : h.$$

Par conséquent, si on imagine une corde SS', qui empêche les parties du corps de se séparer et de se mouvoir parallèlement au plan sur lequel il repose, on en conclura que *la puissance est à la tension de la corde comme* AB *est à* h ; c'est-à-dire *comme la base du triangle, qui représente le profil du coin est à sa hauteur.*

Si en vertu des forces Q, P appliquées perpendiculairement aux faces AB, AC d'un coin susceptible de se mouvoir seulement suivant sa base BC (fig. 64), il s'avançait dans un instant vers B′ d'une petite quantité $BB' = CC'$, de manière à se trouver dans une nouvelle situation $A'B'C'$; il est clair que dans le même tems la puissance Q s'avancerait suivant sa direction de la quantité $MN = e$, et que la puissance P parcourrait suivant la sienne le petit espace $N'M' = e'$. Or si on mène par le point A la droite AA' parallèle à la base BC ; qu'on prolonge les côtés BA, $C'A'$ jusqu'à leur rencontre en F, et qu'on abaisse des points A et A' les perpendiculaires AK, $A'L$, on aura $e' = AK$; $e = A'L$; et puisque $Q : P :: AB : AC$; on aura aussi, à cause des triangles semblables $AA'F$, ABC, $Q : P :: AF : A'F$; mais d'ailleurs... $A'F \times AK = AF \times A'L$; chacun de ces produits exprimant également le double de la surface du même triangle $AA'F$. Par conséquent... $AF : A'F :: AK : A'L :: e' : e$. Donc $Q : P :: e' : e$; c'est-à-dire que *les puissances Q et P sont entr'elles réciproquement comme les petits espaces qu'elles tendent à décrire dans le même instant suivant leurs directions.*

SCHOLIE.

SCHOLIE.

L'égalité entre le rapport direct de deux puissances, et le rapport indirect des espaces qu'elles tendent à parcourir dans le même instant, est donc démontrée pour toutes les machines.

Observation.

Pour trouver les conditions de l'équilibre dans les différentes machines que nous avons considérées, nous n'avons point eu égard au frottement, c'est-à-dire à cette espèce de résistance qu'apporte au mouvement de deux corps l'un sur l'autre, l'inégalité de leurs surfaces. En effet, puisque cette résistance ne se manifeste que dans le cas du mouvement, il semblait naturel d'en renvoyer la théorie à la Dynamique. Cependant on peut l'envisager sous un point de vue qui la fait rentrer dans le domaine de la Statique; c'est lorsque l'on considère une machine ou un corps quelconque près de se mouvoir; car on peut se demander quel rapport doit exister entre la puissance et le poids ou la résistance à vaincre primitivement, lorsque le corps est dans cet état. Il est clair que la force qui, abstraction faite du frottement, était suffi-

sante pour l'équilibre, ne suffit plus maintenant. Il faut donc l'augmenter, si on veut lui conserver sa direction, ou changer, s'il y a lieu, sa direction sans augmenter sa valeur, de manière que la résultante qui auparavant était perpendiculaire à la surface vers laquelle elle était dirigée, soit maintenant inclinée à son égard. De plus, il faut que l'inclinaison soit telle, que la résultante étant décomposée en deux forces, l'une perpendiculaire au plan touchant, et l'autre située dans ce plan, la seconde soit égale à la force du frottement. La première exprimera la pression, qui applique les surfaces l'une contre l'autre, et elle sera détruite si le plan est immobile.

Il suit de là que pour donner une théorie satisfesante de l'équilibre, eu égard à la force du frottement, il faudrait avoir un moyen sûr d'évaluer exactement cette force dans toutes les circonstances et pour toute espèce de matière ; mais il paraît difficile, si même cela n'est pas impossible, de trouver des règles générales qui à cet égard ne laissent rien à desirer. En effet, on conçoit que le frottement doit varier selon le tissu et la nature des corps ; ce qui présente déjà autant de variétés qu'il y a de matières différentes ; selon le degré de dureté et de flexi-

bilité des surfaces qui se touchent, et la figure des pores, qui doit évidemment favoriser plus ou moins l'enfoncement des éminences d'une surface dans les cavités de l'autre. La durée plus ou moins longue de l'application des surfaces l'une contre l'autre, doit aussi, jusqu'à un certain point, modifier la puissance destinée à mettre le corps sur le point de se mouvoir; mais c'est surtout de la pression que dépend en grande partie le frottement. Aussi, sans entrer dans d'autres détails, importans sans doute à connaître, mais qui appartiennent plus particulièrement à la Physique, nous le regarderons comme proportionnel à la pression; mais avant de faire aucune application, nous allons donner un moyen simple et commode de l'évaluer.

Concevons un poids P posé sur un plan incliné AB (fig. 65) et retenu par le seul effet du frottement. L'effort de la pesanteur dirigé suivant la verticale GI qui passe par le centre de gravité G du corps, doit, en rencontrant le plan incliné en I, se décomposer en deux autres, l'un IM perpendiculaire au plan, et l'autre IN dirigé suivant sa longueur. Le premier sera détruit si le point I n'est pas hors de la base ST, et le second pour être détruit, doit être égal à la force du frottement. Donc, à cause de la proportion

NV ou IM : IN :: BC : AC que donne la similitude des triangles INV, ABC, on a, *la pression est à la force du frottement comme la base du plan est à sa hauteur.* On aura pareillement IV : IN :: AB : AC, c'est-à-dire que *le poids du corps est à la force du frottement comme la longueur du plan à sa hauteur.*

Moyennant ces principes, il est aisé de déterminer le frottement sur différentes surfaces. Il ne s'agira que d'élever successivement le plan AB jusqu'à ce que le poids P soit sur le point de glisser; mesurant alors la base et la hauteur du plan, on aura le rapport de la pression à la force du frottement; mais il faudra avoir l'attention de prendre un corps dont le centre de gravité soit peu élevé au-dessus de la longueur du plan, afin que la verticale menée par ce centre ne sorte pas de la base ST, et qu'il ne passe pas même par le point T; car on aurait alors à vaincre le frottement d'un corps, qui frotte par un angle ou une pointe; et par cette raison il serait beaucoup plus considérable que celui dont il s'agit. On voit donc par là qu'ayant égard au frottement, la condition exigée pour l'état d'équilibre le plus voisin du mouvement, est que la résultante des forces qui agissent sur le corps, forme avec la surface sur laquelle il doit glisser,

un angle tel, qu'il en résulte entre la force du frottement et la pression, le rapport que nous venons d'assigner. Or ce rapport étant le même que celui de NI à NV, ou du rayon à la tangente de l'angle TIV, il s'ensuit que dès qu'il sera connu par un moyen quelconque, il sera facile de déterminer l'inclinaison de la résultante de toutes les forces qui agissent sur le corps, pour qu'il soit dans l'état d'équilibre le plus voisin du mouvement. L'angle que fait dans ce cas la direction de la résultante avec la surface sur laquelle le corps doit glisser, se nomme l'*angle du frottement*. Il est le complément de l'angle d'inclinaison du plan, qui aurait pu servir à déterminer la quantité même de ce frottement par le moyen de la pression. Cet angle est différent suivant les différentes espèces de matière, et varie aussi selon qu'elles ont été plus ou moins préparées. Si, par exemple, le frottement est le tiers de la pression, ainsi que cela a lieu à peu près dans beaucoup de circonstances, la tangente sera triple du rayon, et par conséquent il sera facile, à l'aide des Tables, de trouver la grandeur de l'angle cherché.

Ainsi, tant que l'angle d'inclinaison que la résultante fait avec la surface n'est pas plus petit que l'angle du frottement, le corps ou la ma-

chine reste en repos. Il est sur le point de se mouvoir lorsque ces deux angles sont égaux entr'eux. Voyons quel doit être dans ce dernier cas le rapport de la puissance au poids. Nous choisirons, pour faire l'application de nos principes, le lévier, parce qu'à la rigueur les autres machines peuvent être rapportées à celle-ci.

Soient CBL (fig. 66) la section de l'appui faite par le plan des puissances Q et P; q, p les angles que celles-ci font respectivement avec leur résultante, lorsqu'il n'y a pas de frottement; AL la direction de la résultante, lorsque le mouvement est sur le point de naître. Désignons par m l'angle CAL, et par f l'angle du frottement ALB dont le complément $=$ CLI; menons la perpendiculaire CI sur le prolongement de AL, et les perpendiculaires $CE = r$, $CD = R$ sur les directions des puissances P, Q; enfin soit r' le rayon du boulon ou cylindre qui sert d'appui; il est clair qu'on aura....... $CI = r'.\cos f$; et comme les dimensions de la machine, ainsi que les directions des puissances sont données, tout sera connu dans le triangle CAI; on aura donc la valeur de l'angle m et par conséquent celle de $\frac{Q}{P} = \frac{\sin(p+m)}{\sin(q-m)}$, qui convient à l'état d'équilibre le plus voisin du mou-

vement. Pour vérifier ce résultat, on remarquera que si on fait f égal à un angle droit, alors CI devient nul, ainsi que l'angle m; et le rapport de Q à P devient égal à celui de $\sin.p$ à $\sin.q$; ou de r à R, comme nous l'avons vu ailleurs (60).

Les directions des puissances P et Q étant assujéties à passer par les points D et E, si on suppose que leur point de concours A s'éloigne à l'infini, ou, ce qui revient au même, que les puissances et par suite leur résultante deviennent parallèles, la valeur de Q deviendra alors $Q = P.\frac{\sin p + \sin m}{\sin q - \sin m}$; mais en général........ $\sin p : \sin q :: r : R$; et $\sin p : \sin m :: r : r' \cos f$. Donc $\sin p = \frac{r.\sin q}{R}$; et $\sin m = \frac{r' \cos f \sin p}{r}$ $= \frac{r' \cos f \sin q}{R}$. En substituant, on trouvera... $Q = P.\frac{r + r' \cos f}{R - r' \cos f}$; mais lorsqu'il n'y a pas de frottement, $Q = \frac{P.r}{R}$. Donc l'augmentation que la puissance Q doit recevoir à cause du frottement, sera $P.\frac{(R + r)\, r' \cos f}{R\,(R - r' \cos f)}$.

Cette solution convient évidemment à la poulie fixe, en fesant $R = r$; ce qui simplifie un peu l'expression précédente.

Il existe une autre cause, qui diminue l'effet des forces appliquées aux machines, et à laquelle on doit avoir égard lorsqu'on veut les mettre en mouvement, ou même dans l'état le plus voisin du mouvement. C'est la *roideur* des cordes ou la difficulté qu'on éprouve à les plier sur une surface courbe. On conçoit, et c'est d'ailleurs un fait constaté par l'expérience, que cette difficulté est d'autant plus grande, 1°. que la corde est plus grosse; 2°. que la force qui la tend est plus considérable; 3°. qu'elle s'enveloppe autour d'un rouleau ou cylindre plus petit. Ainsi, en partant de cette hypothèse, assez conforme à l'expérience, on voit que si pour une corde dont le rayon $= r$, qui est tendue par une force $=$P, et qui s'enveloppe autour d'un cylindre dont le rayon $=$ R, il faut employer un poids p pour vaincre la résistance dont il s'agit ici, il faudra employer pour une autre corde de même espèce, et pour laquelle les quantités relatives aux précédentes seraient r', P$'$, R$'$, un poids p', qu'on trouvera en fesant la proportion

$$p : p' :: \frac{Pr}{R} : \frac{P'r'}{R'}.$$

Nous terminerons en fesant connaître un moyen simple et assez exact, qu'on a proposé

pour éprouver la roideur des cordes, et estimer la quantité de frottement qu'elles font naître lorsqu'il s'agit de mettre une machine sur le point de se mouvoir.

Soient deux poulies MON, M'O'N' (fig. 67) parfaitement mobiles par leurs essieux sur des appuis fixes, et chargées à l'aide de cordes de différens diamètres, la première de poids égaux P, Q, et la seconde aussi de poids égaux P', Q'. Supposons que pour vaincre les frottemens et les roideurs des cordes, il faille ajouter le poids p au poids P et le poids p' au poids P', nous nous proposons de trouver pour quelles parties les frottemens et les roideurs des cordes entrent dans les poids additionnels p, p'. Soient en conséquence,

R, le rayon de la première poulie;
r, celui de son essieu;
ρ, celui de la première corde;
R', le rayon de la 2ᵉ poulie,
r', celui de son essieu;
ρ', celui de la 2ᵉ corde;
x, la partie du poids p relative au frottement;
y, la partie du poids p relative à la roideur de la première corde;
x', la partie du poids p' relative au frottement;

y', la partie du poids p' relative à la roideur de la 2[e] corde;

n, Le rapport du frottement à la pression;

On aura les cinq équations suivantes :

$$(1)\quad x+y=p;$$
$$(2)\quad x'+y'=p';$$
$$(3)\quad Rx=nr(2P+p);$$
$$(4)\quad R'x'=nr'(2P'+p').$$

Ces deux dernières équations sont relatives au frottement; et si on adopte l'hypothèse que la roideur d'une corde se compose du rapport direct de son rayon, des poids qui la tirent en sens opposés, et du rapport inverse du rayon du cylindre autour duquel elle s'enveloppe, il faudra ajouter aux équations précédentes cette cinquième :

$$(5)\quad Ry\rho'(P'+p')=R'y'\rho\,(2P+p),$$

que donne la proportion

$$y : y' :: \rho.\frac{2P+p}{R} : \rho'.\frac{(2P'+p')}{R'}.$$

Il ne reste plus qu'à chercher les valeurs des cinqinconnues, x, y, x', y', n, par les méthodes ordinaires. Nous laissons aux commençans le soin de faire les calculs, et de discuter les équations qui en résulteront.

ADDITIONS.

Application du calcul infinitésimal à la recherche des centres de gravité, ou d'inertie.

Si on suppose qu'un système de molécules liées entr'elles d'une manière invariable, mais sans aucun ordre dans leurs positions respectives, soit soumis à l'action constante d'une force qui agisse sur chacune d'elles de la même manière, suivant des directions parallèles, il est clair que le seul moyen qui se présente pour avoir dans ce cas le centre d'inertie du système, est de multiplier chaque molécule par sa distance à un plan fixe, et de diviser la somme des produits par la somme des masses ; on a par là la distance du centre d'inertie à ce plan. Si l'on fait une opération semblable à l'égard de deux autres plans formant entr'eux et avec le troisième un angle quelconque, on aura pareillement la distance du centre d'inertie à ces deux derniers plans; et par conséquent la position du centre d'inertie se trouvera déterminée. Soient donc

m, m', m'', m'''... les molécules en question;

x, x', x'', x'''...
y, y', y'', y'''...
z, z', z'', z'''... } les distances respectives de ces molécules à chacun des plans coordonnées.

$\left.\begin{array}{l}X\\Y\\Z\end{array}\right\}$ les distances correspondantes du centre d'inertie :

on aura, pour déterminer la position de ce centre, les trois équations suivantes :

$$X = \frac{mx + m'x' + m''x'' + m'''x''' + \text{etc.}}{m + m' + m'' + m''' + \text{etc.}};$$
$$Y = \frac{my + m'y' + m''y'' + m'''y''' + \text{etc.}}{m + m' + m'' + m''' + \text{etc.}};$$
$$Z = \frac{mz + m'z' + m''z'' + m'''z''' + \text{etc.}}{m + m' + m'' + m''' + \text{etc.}}.$$

Mais on sent que cette manière de procéder, à cause du grand nombre de molécules qu'on doit considérer séparément, présente dans la pratique beaucoup d'embarras et même des difficultés souvent insurmontables, et que par cette raison elle ne peut donner que des résultats approchés. Les méthodes fondées sur l'analyse infinitésimale, au contraire, joignent au mérite de l'exactitude celui de la brièveté et de la précision des calculs. Elles doivent donc obtenir la préférence sur les autres, toutes les fois qu'on peut les employer dans ces sortes de recherches.

Formules générales des Centres de gravité.

Soit M la masse d'une figure quelconque assujétie à une loi constante dans la position de ses points relativement à trois axes ou à trois plans rectangulaires, que je désignerai comme à l'ordinaire, par les plans des x et des y, des x et des z, et des y et des z. Si X est la coordonnée

de son centre d'inertie dans le sens des x, $M.X$ sera le moment de cette masse par rapport au plan des y et des z. Supposons ensuite que cette masse reçoive un accroissement fini, que je représente par ΔM; de sorte que M devienne $M + \Delta M = M'$, et que X devienne X'; les forces égales qui en proviennent étant parallèles et proportionnelles à ces masses, le moment de M' sera égal à la somme des momens de M et de ΔM (39); ainsi, en désignant par x' la distance du centre d'inertie de ΔM au plan des y et des z, on aura. . . . .
$M'.X' = M.X + x'.\Delta M$, ou $M'X' - M.X = x'.\Delta M$. Mais $M'X' - M.X = \Delta MX$. Donc $\Delta MX = x'.\Delta M$; ou $\frac{\Delta MX}{\Delta M} = x'$. Or, quel que soit l'accroissement ΔM de la masse M, le rapport de la différence du moment $M.X$ à celle de la masse est toujours égal à la coordonnée x' du centre d'inertie de cet accroissement. Donc la limite de ce rapport est égale à celle de la coordonnée x'. Mais suivant les principes et la notation du calcul différentiel, la limite de ce rapport est exprimée par $\frac{dMX}{dM}$. Donc, si on représente celle de x' par $\lim. x'$. on aura $\frac{dMX}{dM} = \lim. x'$; et intégrant. . . . .

$M.X = \int . dM . \lim. x'$; d'où $X = \frac{\int . dM . \lim. x'}{M}$ ou plutôt $X = \frac{\int dM . \lim. x'}{\int dM}$.

Par la même raison, si on rapporte le centre d'inertie au plan des x et des z, et à celui des x et des y, on aura

$$Y = \frac{\int dM . \text{lim.} y'}{\int dM}, \quad \text{et} \quad Z = \frac{\int dM . \text{lim.} z'}{\int dM}.$$

Ainsi les trois formules qui, en général, servent à la détermination du centre d'inertie, sont

$$(A) \quad X = \frac{\int dM . \text{lim.} x'}{\int dM};$$

$$(B) \quad Y = \frac{\int dM . \text{lim.} y'}{\int dM};$$

$$(C) \quad Z = \frac{\int dM . \text{lim.} z'}{\int dM}.$$

Il ne s'agira plus que de substituer dans chaque cas particulier la valeur de dM avec celles de lim. x', lim. y', lim. z' et de faire les préparations nécessaires pour intégrer. Ensuite on fixera les limites entre lesquelles l'intégrale doit être prise, conformément à la question qu'on s'est proposée, tant par la détermination de la variable, qui entre dans la formule, que par celle de la constante arbitraire, qui complète l'intégrale. Les exemples que nous allons donner rendront la chose sensible. Mais avant de passer aux applications, nous observerons que si les points matériels de la figure sont placés symétriquement à l'égard de l'un des axes, de celui des x, par exemple, le centre d'inertie se trouvant nécessairement dans cet axe, la première formule $X = \frac{\int dM . \text{lim.} x'}{\int dM}$ est suffisante. Si les points matériels n'étaient placés symétriquement qu'à l'égard d'un plan, le centre d'inertie se trouverait bien à la vérité dans ce plan, et alors la coordonnée qui lui serait perpendiculaire serait nulle ; mais pour avoir sa position, il faudrait connaître sa distance à deux axes situés dans le même plan. Passons aux exemples.

Application aux Lignes droites.

EXEMPLE. *Trouver le centre d'inertie d'une droite dont la densité ou la pesanteur spécifique varie suivant une loi donnée.*

Supposons d'abord que les densités des points matériels de cette ligne soient en raison directe de leurs distances à l'origine des x, que je suppose en A (fig. 68). On aura $AM = x$, l'accroissement sera Mm; et la formule (A) à cause de lim. $x' = x$ et de $dM = axdx$, a étant une quantité constante deviendra $X = \frac{\int x^2 dx}{\int x dx}$. Or........ $\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} +$ const. Mais ici la constante est nulle, parce que l'intégrale est nulle en même tems que la valeur de x. Par la même raison, la constante qu'il faudrait ajouter à $\frac{x^2}{2}$, intégrale du dénominateur xdx, est égale à zéro; ce qui donne $X = \frac{\int x^2 dx}{\int x dx} = \frac{2}{3}x$. Cette formule fait connaître la distance du centre d'inertie de la ligne indeterminée x à son origine A; ainsi, pour avoir celle du centre d'inertie de la ligne entière $AB = e$, au même point; il n'y aura plus qu'à écrire e au lieu de x, d'où $X = \frac{2}{3}e$.

On peut remarquer que cette valeur est la même que celle que nous avons trouvée (53) pour déterminer la position du centre de gravité de l'aire d'un triangle, e représentant alors la droite menée du sommet au milieu de la base. Effectivement, il est aisé de voir que si on suppose la base du triangle devenir de plus en plus petite

jusqu'à s'anéantir, il se change en une droite e dont les points sont chargés proportionnellement à leur distance du sommet.

Supposons à présent que la densité des points de la droite soit proportionnelle à x^m, et que l'origine de cette ligne soit moins éloignée que celle des abscisses x d'une quantité $=1$; dans ce cas, la formule (A) devient... $X=\frac{\int x^{m+1}dx}{\int x^m dx}$; mais alors dans l'équation.......... $\int x^{m+1}dx=\frac{x^{m+2}}{m+2}+C$; la constante C n'est plus égale à zéro; car l'intégrale devient nulle lorsque $x=1$; ce qui donne pour déterminer C, $0=\frac{1}{m+2}+C$; d'où l'on conclut $C=-\frac{1}{m+2}$. L'intégration de $x^m dx$ donne pareillement une constante $=-\frac{1}{m+1}$. Ainsi la véritable valeur de $\frac{\int x^{m+1}dx}{\int x^m dx}$ est, dans ce cas, $\frac{m+1}{m+2}\cdot\frac{x^{m+2}-1}{x^{m+1}-1}$; quelle que soit la valeur de m positive ou négative; et par conséquent la distance du centre d'inertie de la ligne entière e à l'origine des abscisses est

$$X=\frac{m+1}{m+2}\cdot\frac{e^{m+2}-1}{e^{m+1}-1}.$$

Remarquez que si dans le cas où m est négative on fait coïncider l'origine de la droite et celle des abscisses, on trouvera toujours pour X une quantité égale à zéro, comme on peut le conclure de la formule donnée ci-dessus, en déterminant convenablement les constantes qui

qui viennent des intégrations. Ce résultat ne présente rien d'étonnant, si l'on fait attention que la densité des points matériels de la ligne augmentant continuellement à mesure qu'ils s'approchent de l'origine, elle devient infinie, lorsque la distance est infiniment petite.

Application aux arcs de courbe à simple courbure.

Si on suppose la courbe dans le plan même des x et des y, il suffira de rapporter aux deux axes qu'il comprend, chacun des points de l'arc dont on veut connaître le centre d'inertie, en fesant usage des formules (A) et (B). Ici $dM = ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$, s désignant l'arc en question. De plus, lim. $x' = x$, et lim. $y' = y$; car lorsque l'accroissement Δs devient nul ou $= ds$, il est visible qu'il se confond avec le point de l'arc, qui a x et y pour coordonnées. Ainsi nos deux formules, qui sont les seules nécessaires pour ce cas-ci, prendront la forme

$$X = \frac{\int x ds}{\int ds},$$

$$Y = \frac{\int y ds}{\int ds}.$$

Passons aux exemples.

EXEMPLE I.

Trouver le centre d'inertie d'un arc de cercle.

Soit AM l'arc proposé (fig. 69). On veut connaître la distance de son centre d'inertie à l'axe des x qu'on suppose passer par le centre et par l'origine de l'arc, et à l'axe des y dirigé suivant la tangente à l'origine A. Dans le cercle, $ds = \frac{adx}{y}$. Donc $\int y ds = ax + C = ax$,

à cause de $C = 0$. Donc 1°.

$$Y = \frac{ax}{s}.$$

On trouve aussi que dans le cercle $ds = \frac{ady}{a-x}$. Donc $ads - xds = ady$ ou $xds = ads - ady$. Donc..... $\int xds = as - ay$, la constante étant nulle. De même $\int ds = s$ sans constante. Donc, 2°.

$$X = a - \frac{ay}{s}.$$

Si on voulait connaître la distance du centre d'inertie au rayon perpendiculaire à l'axe des abscisses, elle serait égale à $a - X = \frac{ay}{s}$.

Au reste, comme on peut disposer l'axe des x, de manière qu'il divise l'arc en deux parties égales, il suffit de connaître la distance du centre d'inertie soit au sommet, soit au centre de l'arc. Cette dernière, comme nous venons de le voir $= \frac{ay}{s}$; ce qui donne la proportion $2s : 2y :: a : a - X$; ou l'arc : corde :: le rayon à la distance cherchée.

Pour avoir la position du centre d'inertie de la circonférence entière, il faudra faire $y = 0$ et $s =$ à la circonférence, ce qui donnera $X = a$. Le centre d'inertie d'une circonférence de cercle est donc au centre même de la figure ; c'est ce que nous savions d'avance. Mais comme à $y = 0$ répond aussi $s = 0$, on trouvera pour ce cas $X = a - a.\frac{0}{0}$. Pour déterminer la valeur de $a.\frac{0}{0}$, il faut, comme on sait, diviser la différentielle de ay

par celle de s, ce qui donne pour quotient $\frac{ady}{ds}$. Mais $\frac{ady}{ds}=a-x$, et ici $x=0$. Donc on a pour X une quantité égale à zéro, comme cela devait être évidemment.

EXEMPLE II.

Trouver le centre d'inertie d'un arc parabolique.

Soit l'arc MAM′ (fig. 70) divisé en deux parties égales par l'axe Ax. Les deux arcs AM, AM′ étant parfaitement égaux, le centre d'inertie de l'arc est nécessairement dans l'axe Ax. Il ne s'agit donc que de connaître sa distance au sommet A de la courbe, ou la valeur de $X=\frac{\int xds}{\int ds}=\frac{\int x\sqrt{dx^2+dy^2}}{\int\sqrt{dx^2+dy^2}}$. Or en supposant le paramètre de la courbe $=1$, son équation est $y^2=x$; donc $dx=2ydy$; $dx^2+dy^2=dy^2(1+4y^2)$; et..... $\sqrt{dx^2+dy^2}=dy\sqrt{1+4y^2}$. Donc $X=\frac{\int y^2dy\sqrt{1+4y^2}}{\int dy\sqrt{1+4y^2}}$.

Je fais $\int y^2dy\sqrt{1+4y^2}=Ay(1+4y^2)^{\frac{3}{2}}+B\int dy\sqrt{1+4y^2}$, A et B étant des constantes indéterminées. En différentiant, il viendra

$$y^2dy\sqrt{1+4y^2}=Ady(1+4y^2)^{\frac{3}{2}}+12Ay^2dy\sqrt{1+4y^2}$$
$$+Bdy\sqrt{1+4y^2}.$$

Je divise les deux membres de l'équation par $dy\sqrt{1+4y^2}$ ce qui donne $y^2=12Ay^2+4Ay^2+A+B$; d'où je tire $16A=1$; $A+B=0$; et par conséquent $A=\frac{1}{16}$,

14..

$B = -\frac{1}{16}$. Substituant, j'ai pour intégrale $\int y^2 dy \sqrt{1+4y^2}$ $= \frac{1}{16} y(1+4y^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{16}\int dy \sqrt{1+4y^2}$; et pour la distance cherchée $X = \frac{1}{16} \cdot \frac{y(1+4y^2)^{\frac{3}{2}}}{AM} - \frac{1}{16}$. Mais si on mène par le point M la tangente MT, on aura $MT = \sqrt{y^2 + 4x^2}$ $= \sqrt{4y^4 + y^2} = y\sqrt{1+4y^2}$. Donc $\overline{MT}^3 = y^3(1+4y^2)^{\frac{3}{2}}$; et conséquemment $X = \frac{1}{16} \cdot \frac{\overline{MT}^3}{y^2 . AM} - \frac{1}{16}$; ou bien, parce qu'en menant la normale MN, la similitude des triangles TMN, PMT donne $\overline{MT}^2 = NT.PT = 2NT.x = 2NT.y^2$; $X = \frac{1}{8} \cdot \frac{MT.NT}{AM} - \frac{1}{16}$; c'est-à-dire que de $\frac{1}{8} \cdot \frac{MT.NT}{AM}$ il faut retrancher $\frac{1}{16}$ du paramètre, que nous supposons ici égal à l'unité.

Remarquez que si on fesait $y = 0$, la valeur de X prendrait la forme $\frac{1}{16} \cdot \frac{0}{0} - \frac{1}{16}$; et pour déterminer sa valeur, il faudrait, comme dans l'exemple précédent, diviser la différentielle du numérateur par celle du dénominateur; d'où l'on conclurait facilement que X deviendrait $\frac{1}{16} - \frac{1}{16} = 0$; comme cela devait être.

EXEMPLE III.

Trouver le centre d'inertie d'un arc de cycloïde.

Si l'arc NAN′ (fig. 71) est un arc de cycloïde qui ait son sommet en A, et dont le cercle générateur AMB ait un diamètre $= 2a$, on trouvera facilement la valeur de X, distance du sommet A au centre d'inertie, sachant que par la nature de la courbe, $s^2 = 8ax$; car en substi-

tuant dans la formule $X = \frac{\int x ds}{s}$, au lieu de x, sa valeur $\frac{s^2}{8a}$, il viendra $X = \frac{\int s^2 ds}{8as}$, ou en intégrant..... $X = \frac{s^3}{24as} = \frac{1}{3}x$. Les constantes arbitraires que donne l'intégration, sont ici nulles, parce qu'on prend l'arc de la cycloïde à compter de l'origine des abscisses. Ainsi le centre d'inertie de l'arc entier OAO′ de la cycloïde est au tiers du diamètre AB, à compter du sommet de la courbe.

Voici la manière de trouver l'équation de la cycloïde. En désignant par x l'abscisse AP, qui appartient à la fois au cercle générateur et à la cycloïde, par y l'ordonnée PM du cercle, et par z l'ordonnée correspondante de la cycloïde, nous savons que l'arc circulaire AM a pour expression $\int \frac{adx}{\sqrt{2ax - x^2}}$; et que par la nature de la cycloïde $z = y + \int \frac{adx}{\sqrt{2ax - x^2}}$. Donc............ $dz = dy + \frac{adx}{\sqrt{2ax - x^2}}$, ou, à cause de $dy = \frac{(a-x)dx}{\sqrt{2ax - x^2}}$, $dz = \frac{(2a-x)dx}{\sqrt{2ax - x^2}} = dx.\sqrt{\frac{2a-x}{x}}$. Mais $ds^2 = dx^2 + dz^2$; donc, si on substitue à dz sa valeur, on aura $ds^2 = \frac{2a}{x}dx^2$; et par conséquent $ds = \sqrt{2a}.\frac{dx}{\sqrt{x}}$; et en intégrant $s = 2.\sqrt{2ax}$, ou $s^2 = 8ax$.

Application aux arcs de courbe à double courbure.

Les élémens de la courbe à double courbure n'étant pas situés dans un même plan, il faudra nécessairement employer les trois formules que nous avons données ci dessus, pag. 206, et qui se réduisent dans ce cas-ci aux trois suivantes :

$$X = \frac{\int x ds}{\int ds};$$

$$Y = \frac{\int y ds}{\int ds};$$

$$Z = \frac{\int z ds}{\int ds}.$$

Il ne s'agira plus que de faire ensorte, au moyen de substitutions convenables, de n'avoir sous le signe d'intégration $\int$, qu'une seule variable avec sa différentielle. Il faudra pour cela avoir recours aux équations des projections, qui déterminent la nature de la courbe proposée.

EXEMPLE.

Soit proposée la courbe à double courbure dont la projection sur le plan des x et des y est exprimée par $(y^2 - 2a^2)^3 = 9a^4x^2$; et la projection sur celui des y et des z par $y^2 = az$. Si on prend les valeurs de dx et de dz en fonctions de y et de dy, on trouvera ds ou $\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \frac{y^2dy}{a^2} + dy$, dont l'intégrale est $\frac{y^3}{3a^2} + y + C$. Pour déterminer C, j'observe que si l'origine de la courbe est placée sur le plan des y et des z, l'arc sera zéro, lorsque $x = 0$; mais lorsque $x = 0$,

$y^2 = 2a^2$, ou $y = a\sqrt{2}$; donc la valeur de la constante sera donnée par l'équation $0 = \frac{2}{3}a\sqrt{2} + a\sqrt{2} + C$; d'où $C = -\frac{5}{3}a\sqrt{2}$. Par conséquent

$$s \text{ ou } \int\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \frac{y^3}{3a^2} + y - \frac{5}{3}a\sqrt{2}.$$

Cherchons à présent les valeurs de X, de Y et de Z.

1°. xds, en mettant $\frac{(y^2 - 2a^2)\sqrt{y^2 - 2a^2}}{3a^2}$ à la place de x, devient $= \frac{1}{3a^4}(y^2 - 2a^2)(y^2 + a^2)\,dy\sqrt{y^2 - 2a^2}$; ou $xds = \frac{1}{3a^4}(y^4 - a^2y^2 - 2a^4)\,dy\sqrt{y^2 - 2a^2}$. Or l'intégrale de cette dernière quantité est

$$\frac{1}{3a^4}\left\{\left[\tfrac{1}{6}y^3(y^2 - 2a^2) - a^4y\right]\sqrt{y^2 - 2a^2} - 2a^6\,l\,\frac{y - \sqrt{y^2 - 2a^2}}{a\sqrt{2}}\right\};$$

Donc

$$\text{I}^\circ.\ X = \frac{\left[\tfrac{1}{6}y^3(y^2 - 2a^2) - a^4y\right]\sqrt{y^2 - 2a^2} - 2a^6\,l\,\frac{y - \sqrt{y^2 - 2a^2}}{a\sqrt{2}}}{3a^4 s}.$$

2°. $yds = \frac{y^3dy}{a^2} + ydy$, dont l'intégrale est $\frac{y^4}{4a^2} + \frac{y^2}{2} + C$; mais la constante $= -3a^2$, parce que l'intégrale est nulle, lorsque $x = 0$, ou $y^2 = 2a^2$. Donc

$$\text{II}^\circ.\quad Y = \frac{y^4 + 2a^2y^2 - 12a^4}{4a^2 s}.$$

$$3^\circ.\quad zds = \frac{y^4}{a^3}dy + \frac{y^2dy}{a},$$

dont l'intégrale

$$=\frac{y^5}{5a^3}+\frac{y^3}{3a}-\frac{22a^2}{15}.\sqrt{2}.$$

Donc

$$\text{III}^{\circ}.\ Z=\frac{3y^5+5a^2y^3-22a^5\sqrt{2}}{15a^3s}.$$

Application aux surfaces planes.

Ici l'élément dM de la surface $=ydx$, et lim. $x'=x$, parce que l'accroissement de l'aire devenant nul, se change en une ligne droite, qui se confond avec l'ordonnée y à laquelle répond l'abscisse x. Quant à la valeur de lim. y', elle devient $\frac{y}{2}$, parce que la distance du centre d'inertie d'une droite à l'une de ses extrémités est égale à la moitié de cette ligne. Ainsi, les deux premières formules relatives à la détermination du centre d'inertie, sont, pour le cas présent,

$$X=\frac{\int xydx}{\int ydx};$$

$$Y=\frac{1}{2}.\frac{\int y^2dx}{\int ydx}.$$

Le reste n'est plus qu'une affaire de calcul. On fera les substitutions convenables, et on intégrera comme à l'ordinaire. La troisième formule est inutile, parce que nous supposons l'arc des x et celui des y situés dans le plan de la surface; et même s'il arrivait que l'aire fût symétrique à l'égard de l'un de ces deux axes, on n'aurait besoin que d'une de ces formules pour déterminer la position du centre d'inertie.

Si l'aire était renfermée entre deux courbes, en désignant par y et par y' les ordonnées qui répondraient à une même abscisse x, il est aisé de voir qu'alors on aurait pour les coordonnées du centre d'inertie,

$$X = \frac{\int(y - y')xdx}{\int(y - y')dx};$$

$$Y = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{\int(y^2 - y'^2)dx}{\int(y - y')dx}.$$

Les formules précédentes semblent supposer que les coordonnées sont rectangulaires; mais il est aisé de s'assurer qu'elles conviennent aussi aux cas où elles sont obliquangles; car alors pour avoir la valeur de dM, il faut multiplier ydx par sin a, a étant l'angle des coordonnées, et les formules deviendront

$$X = \frac{\int xy \sin a dx}{\int y \sin a dx},$$

$$Y = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{\int y^2 \sin a dx}{\int y \sin a dx}.$$

lesquelles ne diffèrent des précédentes que par le facteur constant sin a, qui se trouvant au numérateur et au dénominateur, peut être supprimé. Or nous savons que les formules des momens relatives aux forces parallèles ne supposent pas que les droites interceptées par le centre ou l'axe des momens et par les directions des forces, soient perpendiculaires à celles-ci. Donc les formules que nous venons de donner pour déterminer le centre d'inertie de l'aire d'une surface plane, sont vraies, quels que soient les angles des coordonnées.

EXEMPLE I.

Trouver le centre d'inertie d'un trapèze.

Soit le trapèze ABCD (fig. 72), GE la droite qui joint les milieux des deux bases parallèles opposées. Fesons

$$GP = x; \quad PM = y; \quad GE = h; \quad AD = a; \quad BC = b;$$

nous aurons

$$2h : b - a :: x : y - \tfrac{1}{2} a.$$

Donc

$$y - \tfrac{1}{2} a = \frac{b - a}{2h} . x, \quad \text{ou} \quad y = \frac{ah + (b - a) x}{2h}.$$

Par conséquent

$$xydx = \frac{ahxdx + (b - a) x^2 dx}{2h};$$

et

$$ydx = \frac{ahdx + (b - a) xdx}{2h}.$$

Ainsi la valeur de X deviendra,

$$X = \frac{\int [ahxdx + (b - a) x^2 dx]}{\int [ahdx + (b - a) xdx]},$$

ou, en intégrant,

$$X = \frac{\frac{1}{2} ahx^2 + \frac{1}{3} (b - a) x^3 + C}{ahx + \frac{1}{2} (b - a) x^2 + C}.$$

Mais ici les constantes C et C′ sont nulles, parce que chacune des intégrales est zéro, lorsque $x = 0$.

Donc

$$X = \frac{3ahx^2 + 2 (b - a) x^3}{6ahx + 3 (b - a) x^2};$$

et fesant $x = h$, pour avoir la position du centre d'inertie du trapèze entier :

$$X = \frac{3ah^3 + 2(b-a)h^3}{6ah^2 + 3(b-a)h^2} = \frac{a+2b}{3(a+b)}.h;$$

résultat conforme à celui que nous avons trouvé p. 113.

EXEMPLE II.

Trouver le centre d'inertie d'un demi-segment circulaire.

En fesant AP $= x$ (fig. 73), PM $= y$, la coordonnée du centre d'inertie dans le sens des y sera

$$Y = \frac{1}{2}.\frac{\int y^2dx}{\int ydx}.$$

Or

$$\int y^2dx = \int(2axdx - x^2dx) = ax^2 - \frac{1}{3}x^3,$$

la constante étant nulle; et $\int ydx$ représente l'aire du demi-segment AMP. Donc

$$Y = \frac{1}{2}.\frac{(a - \frac{1}{3}x)x^2}{\text{AMP}}.$$

Pour la coordonnée X dans le sens des x, on a

$$X = \frac{\int xdx\sqrt{2ax - x^2}}{\int ydx}.$$

Or

$$xdx\sqrt{2ax-x^2} = -\left(\frac{2a-2x}{2}\right)dx\sqrt{2ax-x^2} + adx\sqrt{2ax-x^2},$$

dont l'intégrale $= a.\text{AMP} - \frac{1}{3}(2ax - x^2)^{\frac{3}{2}}$, sans constante, parce que l'intégrale est nulle en même tems que x

et l'aire AMP. Donc

$$X = \frac{a.\text{AMP} - \frac{1}{3}\overline{\text{PM}}^3}{\text{AMP}}.$$

Comme le demi-secteur AMC est composé du demi-segment AMP et du triangle PMC, il ne sera pas difficile d'en trouver le centre d'inertie.

Il est clair que le centre d'inertie du segment entier MAN est sur l'axe même des x à une distance du sommet A égale à $X = \frac{a.\text{AMP} - \frac{1}{3}\overline{\text{PM}}^3}{\text{AMP}}$, ou à une distance du centre C du cercle égale à $a - X = \frac{1}{3}.\frac{\overline{\text{PM}}^3}{\text{AMP}}$.

Mais si on veut connaître le centre d'inertie du secteur entier CMANC, on pourra le considérer comme composé du segment MANM, et du triangle CMN. Par conséquent, en désignant par X′ la coordonnée du centre d'inertie comptée du centre C, on aura

$$X'.\text{CMANC} = \tfrac{2}{3}\overline{\text{MP}}^3 + \tfrac{2}{3}\text{CMN}.\text{CP}.$$

Or

$$\text{CMANC} = \tfrac{1}{2}a.\text{MAN}, \quad \text{et} \quad \text{CMN} = \text{PM}.\text{CP}.$$

Donc

$$X' = \tfrac{4}{3}.\frac{\text{PM}.(\overline{\text{PM}}^2 + \overline{\text{CP}}^2)}{a.\text{MAN}}, \quad \text{ou} \quad X' = \tfrac{2}{3}\text{MN}.\frac{a}{\text{MAN}}.$$

ce qui nous apprend que la distance du centre d'un cercle au centre d'inertie d'un secteur, est une quatrième proportionnelle à l'arc, à la corde et aux deux tiers du rayon, cette distance étant prise sur le rayon qui divise le secteur en deux parties égales.

Application aux surfaces courbes.

La recherche du centre d'inertie des surfaces latérales du prisme et du cylindre ne peut souffrir aucune difficulté. Il est visible qu'il doit se trouver au milieu de la droite que décrit le centre d'inertie de la base génératrice.

Quant aux surfaces engendrées par la rotation d'une ligne autour d'un axe immobile, il est encore évident que leur centre d'inertie doit être sur cet axe. Il s'agit de connaître sa distance X à l'origine des abscisses. L'élément dM est pour le cas présent $2\pi yds$, π exprimant le rapport de la circonférence au diamètre; et lim. $x' = x$; ainsi la distance cherchée sera

$$X = \frac{\int 2\pi xyds}{\int 2\pi yds}, \quad \text{ou} \quad X = \frac{\int xy\sqrt{dx^2 + dy^2}}{\int yds}$$

EXEMPLE I.

Trouver le centre d'inertie de la surface convexe d'un cône droit.

La surface d'un cône droit est engendrée par l'hypoténuse d'un triangle rectangle SAC (fig. 74) tournant autour du côté SC, et dont l'équation est $y = x \operatorname{tang} a$; a désignant l'angle que fait la génératrice SA autour de l'axe immobile SC. On aura donc

$$dy = \operatorname{tang} a . dx, \text{ et } \overline{ds}^2 = dx^2 (1 + \operatorname{tang}^2 a) = \frac{dx^2}{\cos^2 a};$$

d'où

$$ds = \frac{dx}{\cos a}; \; yds = \frac{x.dx}{\cos a} . \operatorname{tang} a,$$

et

$$xyds = \frac{x^2dx}{\cos a} \cdot \text{tang } a :$$

donc

$$X = \frac{\int x^2dx}{\int xdx} = \frac{\frac{1}{3}x^3}{\frac{1}{2}x^2} = \frac{2}{3}x ;$$

et pour la surface entière,

$$X = \frac{2}{3}h,$$

en représentant par h la hauteur SC du cône. Le centre de gravité de la surface d'un cône droit est donc le même que celui du double du triangle générateur.

On n'a point ajouté de constante en intégrant le numérateur x^2dx, et le dénominateur xdx, parce qu'on a supposé que la surface était comptée du sommet; mais si on eût voulu avoir le centre d'inertie de la surface d'un tronc de cône engendré par le trapèze CAGH, tournant autour de CH, en désignant par m et n les coordonnées SH et GH, il aurait fallu ajouter à l'intégrale du numérateur la constante $-\frac{m^3}{3}$, et à celle du dénominateur la constante $-\frac{m^2}{2}$; parce que chacune des intégrales aurait été nulle pour $x = m$. Ainsi la distance X deviendrait $\frac{2}{3}\,\frac{h^3-m^3}{h^2-m^2}$; ou, en fesant CA $= b$, $X = \frac{2}{3}\frac{h}{b}\cdot\frac{b^3-n^3}{b^2-n^2}$.

EXEMPLE II.

Trouver le centre d'inertie de la surface d'une zône sphérique.

On aura l'équation $y^2 = 2ax - x^2$, et par conséquent $ds = \frac{adx}{y}$. Substituant dans la formule $X = \frac{\int xyds}{\int yds}$, il viendra $X = \frac{\int xdx}{\int dx} = \frac{x}{2}$, sans constante, si la surface est comptée depuis le sommet. Ainsi le centre de gravité d'une calotte sphérique est au milieu de la flèche. Si on fait $x = 2a$, pour avoir le centre de gravité de la surface entière de la sphère, il viendra $X = a$, ce qu'on savait d'avance.

S'il était question de trouver le centre d'inertie d'une zône proprement dite, c'est-à-dire, de la surface d'une portion de sphère comprise entre deux plans perpendiculaires à son axe; on y parviendrait facilement, en prenant les intégrales entre les limites données sur l'axe des abscisses : cela ne peut présenter de difficulté, après ce que nous avons vu ci-dessus.

EXEMPLE III.

Trouver le centre d'inertie de la surface d'un paraboloïde.

L'origine des abscisses étant placée au sommet de l'arc, l'équation de la parabole est $y^2 = ax$, et par conséquent la formule

$$X = \frac{\int xyds}{\int yds} \text{ devient } X = \frac{1}{a}\frac{\int y^3 dy \sqrt{a^2+4y^2}}{\int ydy \sqrt{a^2+4y^2}}.$$

Or

$$\int y^3 dy \sqrt{a^2+4y^2} = \frac{1}{20}\left[(a^2+4y^2)^{\frac{3}{2}}\left(y^2 - \frac{a^2}{6}\right) + \frac{a^5}{6}\right],$$

et

$$\int y dy \sqrt{a^2+4y^2} = \frac{1}{12}\left[(a^2+4y^2)^{\frac{3}{2}} - a^3\right].$$

Donc

$$X = \frac{3}{5a} \cdot y^2 \frac{(a^2+4y^2)^{\frac{3}{2}}}{(a^2+4y^2)^{\frac{3}{2}} - a^3} - \frac{1}{10} a.$$

Application aux solides.

Nous supposerons les volumes symétriques à l'égard de l'axe des x, et par conséquent il nous suffira de calculer la valeur de $X = \frac{\int x dM}{\int dM}$. Nous ne nous arrêterons point à la recherche du centre d'inertie des prismes et des cylindres; car, s'ils sont homogènes, il est clair qu'il se trouve au milieu de la droite qui joint les centres d'inertie des bases opposées. Passons aux pyramides et aux cônes.

EXEMPLE I.

Trouver le centre d'inertie des pyramides et des cônes.

Nous placerons l'origine des abscisses au sommet même de la figure.

Cela posé, on peut imaginer les pyramides et les cônes partagés en tranches semblables et parallèles à la base. En désignant par K^2 une des sections, elle sera une fonction de x, et dM deviendra, au moins dans le cas où les coupes sont perpendiculaires à l'axe des abscisses, égal à $K^2 dx$, et $\lim x' = x$. Ainsi la formule précédente se change en

$$X = \frac{\int K^2 x dx}{\int K^2 dx}.$$

Cette

Cette formule aurait encore lieu, quand même les sections ne seraient pas perpendiculaires à l'axe des x, parce que, dans ce cas, l'expression de dM ne diffère de la précédente que par un facteur constant $\sin i$ (i marquant l'inclinaison de l'axe sur la base) qui se trouverait également au numérateur et au dénominateur, et que d'ailleurs, pour les momens, il est indifférent de prendre des perpendiculaires ou des droites également inclinées sur les tranches.

Soit la distance SA du sommet de la figure au centre d'inertie de la base $= h$ (fig. 75), et SP $= x$; et fesons de plus la base $= b^2$; on aura par la propriété des solides que nous considérons ici : $h^2 : x^2 :: b^2 : \text{K}^2$. Donc

$$\text{K}^2 = \frac{b^2}{h^2}.x^2,\ \text{K}^2 dx = \frac{b^2}{h^2}x^2 dx,$$

et

$$\text{K}^2 x dx = \frac{b^2}{h^2}.x^3 dx.$$

Ainsi la formule devient

$$\text{X} = \frac{\int x^3 dx}{\int x^2 dx} = \tfrac{3}{4}x;$$

si la solidité se compte du sommet ou de l'origine; et pour la valeur de X relative à la figure entière, on aura

$$\text{X} = \tfrac{3}{4}h;$$

résultat conforme à celui que nous avons trouvé ailleurs.

S'il était question d'avoir le centre d'inertie d'un cône tronqué, dont la hauteur ou la distance des centres des deux bases fût égale à OA $= g$, la formule géné-

rale serait toujours $X=\frac{\int x^3dx}{\int x^2dx}$; mais alors les constantes qui viennent de l'intégration ne seraient plus égales à zéro. Pour les déterminer, on remarquera que lorsque $x=SO=h'$, chaque intégrale devient nulle. On aura donc $o=\frac{h'^4}{4}+C$; d'où $C=-\frac{h'^4}{4}$. Ainsi $\int x^3dx=\frac{x^4-h'^4}{4}$. Par la même raison, $\int x^2dx=\frac{x^3-h'^3}{3}$; donc il viendra pour la figure entière

$$X=\tfrac{3}{4}\cdot\frac{h^4-h'^4}{h^3-h'^3}.$$

On sera le maître d'éliminer h et h', et d'introduire seulement dans l'expression de X les bases du cône tronqué, et la droite qui joint leurs centres. En désignant par b'^2 la base qui répond à l'abscisse h', on aura $h:h'::b:b'$; d'où $h-h'$, ou $g:h'::b-b':b'$. Donc $h'=\frac{b'g}{b-b'}$; un calcul semblable donne $h=\frac{bg}{b-b'}$. Ainsi

$$\frac{h^4-h'^4}{h^3-h'^3}=\frac{g}{b-b'}\cdot\frac{b^4-b'^4}{b^3-b'^3}.$$

Donc

$$X=\tfrac{3}{4}\cdot\frac{g}{b-b'}\cdot\frac{b^4-b'^4}{b^3-b'^3}.$$

Pour les solides de révolution, on a $dM=\pi y^2dx$, π exprimant toujours le rapport de la circonférence au diamètre, et par conséquent

$$X=\frac{\int\pi xy^2dx}{\int\pi y^2dx}=\frac{\int xy^2dx}{\int y^2dx}.$$

EXEMPLE II.

Trouver le centre d'inertie d'un segment sphérique.

L'équation du cercle étant $y^2 = 2ax - x^2$, on a

$$\int y^2 dx = \int (2axdx - x^2 dx) = ax^2 - \frac{x^3}{3},$$

la constante étant nulle, parce que la solidité est comptée depuis l'origine des abscisses. Par la même raison,

$$\int xy^2 dx = \int (2ax^2 dx - x^3 dx) = \frac{2ax^3}{3} - \frac{x^4}{4}.$$

Donc

$$X = \frac{\frac{2}{3}ax^3 - \frac{1}{4}x^4}{ax^2 - \frac{1}{3}x^3} = \frac{8ax^3 - 3x^4}{12ax^2 - 4x^3};$$

ou

$$X = \frac{8a - 3x}{12a - 4x} \cdot x.$$

Si on fait $x = a$, ou $= 2a$, on aura la position du centre d'inertie de l'hémisphère, ou de la sphère entière. La première supposition donne $X = \frac{5}{8}a$, et la seconde $X = a$.

EXEMPLE III.

Trouver le centre d'inertie d'un secteur sphérique.

J'observe qu'un secteur sphérique, tel que CMANKL (fig. 76) peut être décomposé en deux parties, dont l'une est le segment AMKNL, et l'autre le cône CMKNL. Or, nous venons de voir que la distance du centre d'inertie du segment au sommet $= \frac{8a - 3x}{12a - 4x} \cdot x$, x représentant la flèche AP; et si on suppose que G soit

le centre d'inertie du cône CMKNL, on aura

$$PG = \frac{1}{4} PC = \frac{1}{4}(a - x).$$

Donc GA, ou la distance du centre d'inertie du cône au sommet $A = x + \frac{a-x}{4}$, ou $\frac{3x+a}{4}$. D'ailleurs la solidité du secteur $= \frac{2\pi a^2 x}{3}$; celle du segment..... $= \frac{1}{3}\pi x^2(3a - x)$; celle du cône $= \frac{1}{3}\pi . (2ax - x^2)(a - x)$.
Mais le moment du secteur égale celui du segment, plus celui du cône; donc, en désignant par X la distance du centre d'inertie du secteur au sommet A, origine des abscisses, il viendra

$$X . \tfrac{2}{3}\pi a^2 x = \tfrac{1}{3}\pi\left[\overline{x}^3 . \frac{8a-3x}{4} + (2ax - x^2)(a-x)\frac{3x+a}{4}\right];$$

d'où

$$X = \frac{\frac{1}{4}x^2(8a-3x) + \frac{1}{4}(2a-x)(a-x)(3x+a)}{2a^2} = \tfrac{1}{8}(2a+3x).$$

Si, dans cette dernière expression on fait $x = a$, X devient $\frac{5}{8}a$; et si on fait $x = 0$, il vient $X = \frac{1}{4}a$; ce qui doit être, parce que, dans le premier cas, on aurait un hémisphère, et dans le second un cône, qui aurait pour hauteur le rayon de la sphère, et pour base une quantité infiniment petite.

EXEMPLE IV.

Trouver le centre d'inertie d'un solide engendré par la rotation d'une section conique autour de son axe.

Si la section conique est une parabole, on aura $y^2 = ax$, et par conséquent $X = \frac{\int xy^2 dx}{\int y^2 dx} = \frac{\int ax^2 dx}{\int axdx} = \frac{2}{3}x$.

Si la section conique est une hyperbole, on aura $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax + x^2)$; et par conséquent X devient

$$\frac{\int(2ax + x^2)xdx}{\int(2ax + x^2)dx} = \frac{8a + 3x}{12a + 4x}.x;$$

d'où il est aisé de conclure que la distance du centre d'inertie d'un hyperboloïde à son sommet, a pour limites les $\frac{2}{3}$ et les $\frac{3}{4}$ de l'abscisse.

Il est sans doute inutile de faire observer que le centre d'inertie d'un segment d'ellipsoïde est le même que celui du segment correspondant d'une sphère qui aurait pour diamètre celui de l'ellipsoïde.

Nous ne multiplierons pas davantage les exemples. Ceux que nous avons donnés doivent suffire pour mettre sur la voie des procédés qu'il faut employer suivant les circonstances, et pour lever les difficultés qui se présentent. Il nous reste à faire connaître un usage des centres d'inertie, propre à donner, d'une manière expéditive et facile, les surfaces et les volumes des solides de révolution.

Méthode Centro-barique.

La *Méthode Centro-barique* est aussi appelée la *Règle de Guldin*, du nom de son inventeur. Elle consiste dans des procédés très-simples, propres à faire trouver la surface ou le volume d'un solide de révolution. Ces procédés ne sont qu'une application des formules que nous avons données ci-dessus pour la valeur de l'ordonnée Y du centre d'inertie de l'arc ou de l'aire d'une courbe. On a

vu que pour le premier cas, on avait

$$Y = \frac{\int 2y\, ds}{\int 2\pi ds}:$$

d'où $2\pi Ys = \int 2\pi y ds$. Or le dernier membre de cette équation exprime la surface d'un solide engendré par la rotation de l'arc s autour de l'axe des x; et le premier membre est le produit de la ligne génératrice par la circonférence que décrit son centre d'inertie; d'où il suit que la surface d'un solide de révolution engendrée par une ligne tournant autour d'un axe, est égale au produit de la ligne génératrice par la circonférence que son centre d'inertie décrit autour de cet axe.

Ce résultat s'applique évidemment à un nombre quelconque de lignes droites ou courbes, qui tournent autour d'un même axe. La quantité de surface engendrée par cette rotation est égale au produit de la somme de toutes les lignes par la circonférence que décrit leur centre commun d'inertie. On suppose que toutes les génératrices sont situées d'un même côté de l'axe; car, s'il y en avait de l'autre côté, la proposition énoncée ne serait vraie qu'autant qu'on retrancherait la somme des surfaces engendrées par les lignes situées d'un côté, de la somme des surfaces produites par la rotation des lignes situées de l'autre côté.

En effet, soient s', s'', s''', s^{IV}, etc., les arcs de courbe situés d'un côté de l'axe; r', r'', r''', r^{IV}, etc., les distances respectives de leur centre d'inertie à l'axe; $s_{\prime}$, $s_{\prime\prime}$, $s_{\prime\prime\prime}$, s_{IV}, etc., les arcs situés de l'autre côté de l'axe, et $r_{\prime}$, $r_{\prime\prime}$, $r_{\prime\prime\prime}$, r_{IV}, etc., les distances de leurs centres de gravité au même axe; on

aura par la propriété des centres d'inertie:

$$s'.r' + s''.r'' + s'''.r''' + s^{\text{IV}}.r^{\text{IV}}, + \text{etc.}$$
$$-(s_,.r_, + s_{,,}.r_{,,} + s_{,,,}.r_{,,,} + s_{\text{IV}}.r_{\text{IV}}, + \text{etc.})$$
$$=(s'+s''+s'''+s^{\text{IV}}+, \text{etc.}, +s_,+s_{,,}+s_{,,,}+s_{\text{IV}}+ \text{etc.})\text{Y},$$

Y étant l'ordonnée du centre commun d'inertie de tous les arcs. Donc aussi

$$2\pi s'r' + 2\pi s''r'' + 2\pi s'''r''', + \text{etc.}$$
$$-2\pi.s_,r_, - 2\pi.s_{,,}.r_{,,} - 2\pi.s_{,,,}.r_{,,,} - \text{etc.}$$
$$= 2\pi(s' + s'' + s''' + \text{etc.} + s_, + s_{,,} + s_{,,,} + \text{etc.})\ \text{Y}.$$

Mais $2\pi r's'$ exprime la surface du solide de révolution engendré par la rotation de s' autour de l'axe des x; de même $2\pi r''s''$ exprime la surface du solide de révolution engendré par la rotation de s'' autour du même axe, ainsi des autres. D'ailleurs $2\pi\text{Y}$ exprime la circonférence décrite par Y. Donc

$$2\pi\text{Y}(s' + s'' + s''' + \text{etc.}, + s_, + s_{,,} + s_{,,,} + \text{etc.})$$

égale la somme des surfaces des solides de révolution, engendrées par la rotation des arcs de courbe situés d'un côté de l'axe, moins la somme des surfaces des solides de révolution engendrées par la rotation des arcs situés de l'autre côté.

Réciproquement, si on connaissait le centre commun d'inertie de toutes les lignes, on aurait la totalité des surfaces décrites par leur révolution autour d'un arc, en multipliant la somme des lignes par la circonférence que décrirait leur centre commun d'inertie.

Pour le second cas, c'est-à-dire pour le cas où il s'agit d'avoir l'ordonnée Y du centre d'inertie de l'aire d'une

courbe, on a trouvé

$$Y = \frac{\int \pi y^2 dx}{2\pi \int y dx};$$

d'où $2\pi Y . \int y dx = \int \pi y^2 dx$. Mais le second membre de cette équation exprime le volume du solide engendré par l'aire d'une courbe autour de l'axe des x, et le premier est le produit de cette aire par la circonférence que décrit son centre d'inertie. Le solide engendré par la révolution de l'aire d'une courbe autour d'un axe, est donc égal au produit de l'aire de cette courbe, par la circonférence que décrit son centre d'inertie.

La propriété dont il s'agit a lieu, quelle que soit la figure génératrice, et quelle que soit sa situation à l'égard de l'axe. En effet, soit une figure quelconque composée de deux branches CMB, CM'B (fig. 77); supposons $AP = x$, $PM = y$, $PM' = y'$, il est clair qu'on aura pour l'élément de l'espace représenté par dM, $(y' - y)dx$, et pour la distance du centre d'inertie de MM' à l'axe, $\frac{y + y'}{2}$. Donc ce que nous avons désigné dans la formule générale par $dM \lim y'$, devient ici $(y' - y)\frac{y + y'}{2} . dx$, ou $\frac{y'^2 - y^2}{2} . dx$.

d'où nous conclurons

$$Y = \frac{\int (y'^2 - y^2) dx}{2 \text{CMBM}'},$$

l'intégrale étant prise dans les limites convenables pour avoir le centre d'inertie de la figure entière. Par conséquent $2\pi Y . \text{CMBM}' = \pi \int y'^2 dx - \pi \int y^2 dx$. Or, il est visible que $\pi \int y'^2 dx$ exprime le solide formé par la ré-

volution de la partie supérieure CM'BDD', et que $\pi\int y^2dx$ est l'expression du solide engendré en même tems par la partie inférieure CMBDD'.

Au reste, ce qui a été dit dans le premier cas, pour un nombre indéterminé de figures génératrices, a lieu de même dans ce cas-ci. Car, d'une part, chaque figure multipliée par la circonférence que décrit son centre d'inertie, donne pour produit le volume engendré dans sa révolution, et d'une autre, la somme des figures multipliée par la circonférence que décrit leur centre commun d'inertie, est égale à la somme des produits de chaque figure, par la circonférence que décrit son centre particulier d'inertie. C'est une suite de ce que la somme des produits de chaque figure par la distance de son centre d'inertie à l'axe, est égale à la somme des figures multipliée par la distance de leur centre commun d'inertie au même axe, et que ces distances sont des rayons de cercle, lesquels sont proportionnels aux circonférences. C'est ce que fait voir évidemment l'équation suivante dans laquelle a', a'', a''', etc., r', r'', r''', etc., désignent les aires situées d'un côté de l'axe, et les distances respectives de leur centre d'inertie à cet axe; $a_{,}$, $a_{,,}$, $a_{,,,}$, etc., $r_{,}$, $r_{,,}$, $r_{,,,}$, etc., les aires situées de l'autre côté de l'axe et les distances de leurs centres d'inertie au même axe :

$$\begin{aligned}&Y(a'+a''+a'''+\text{ etc.}, +a'+a_{,,}+a_{,,,}+\text{ etc.})\\ &=a'r'+a''r''+a'''r'''+\text{ etc.}, -a_{,}r_{,}-a_{,,}r_{,,}-a_{,,,}r_{,,,}-\text{ etc.}\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}2\pi Y(a'+a''+a'''+\text{ etc.}, &+a_{,}+a_{,,}+a_{,,,}+\text{ etc.})\\ =2\pi a'r'&+2\pi a''r''+2\pi a'''r'''+\text{ etc.}\\ -2\pi r_{,}a_{,}&-2\pi r_{,,}a_{,,}-2\pi r_{,,,}a_{,,,}-\text{ etc.}\end{aligned}$$

On peut donc dire qu'en général quel que soit le nombre de figures situées dans un même plan, et tournant autour d'un axe pris à volonté dans ce plan, la somme des solides engendrés par leur révolution, est égale à la somme de toutes ces figures multipliée par la circonférence que décrit le centre d'inertie de tout le système. On suppose que si toutes les figures ne sont pas situées d'un même côté de l'axe, on a eu l'attention de soustraire la somme des solides engendrés par les figures qui sont situées d'un côté, de celle des solides produits par les figures qui sont situées de l'autre côté.

Il suit de là que si on connaissait le centre commun d'inertie de toutes les figures génératrices, on aurait la somme des solides engendrés par ces figures, en multipliant la somme de celles-ci par la circonférence que décrirait le centre d'inertie du système.

Réciproquement, si on veut trouver le centre d'inertie d'un espace quelconque, on pourra le faire tourner autour d'un axe pris à volonté, et le solide ainsi engendré étant divisé par le produit de 2π et de la surface génératrice, donnera pour quotient la distance du centre d'inertie à l'axe de rotation. Il faudra ensuite chercher la distance du même centre à un autre axe, et le centre d'inertie de l'espace proposé se trouvera par là déterminé. Il est inutile de faire observer que cette méthode ne peut avoir d'application, qu'autant que l'on connaîtrait d'ailleurs la mesure des solides.

Si la ligne ou l'aire génératrice ne fesait pas une révolution entière autour de l'axe, il est clair qu'on trouverait la surface ou le volume qu'engendrerait la rotation, en fesant cette proportion : la circonférence entière qu'aurait décrite le centre d'inertie du système, est à la

partie de la circonférence réellement décrite, comme la totalité des surfaces ou des solides, qu'aurait produite la révolution entière du centre commun d'inertie, est à la portion de surface ou de solide réellement produite; de sorte que si le centre d'inertie n'a fait que la moitié, ou le tiers, ou le quart, ou, etc., d'une révolution entière, on n'aura réellement que la moitié, ou le tiers, ou le quart, ou, etc., de ce qu'aurait donné une révolution entière.

Enfin nous conclurons de ce qui précède, que la méthode centro-barique est renfermée dans ce théorème :

Toutes les surfaces, ou tous les solides qui proviennent de la rotation de plusieurs lignes ou de plusieurs surfaces autour d'un axe pris à volonté, ont pour valeur le produit de la somme des lignes ou des aires génératrices par le chemin que parcourt le centre commun d'inertie de ces lignes ou de ces aires autour de l'axe de rotation.

Fesons quelques applications des propriétés que nous venons d'exposer.

I.

Soit un polygone régulier M (fig. 78), ou seulement symétrique, qu'on suppose tourner autour de l'axe AB; si on fait c égal à son périmètre, et a égal à la perpendiculaire abaissée du centre sur l'axe AB, on aura pour l'expression de la surface engendrée par une révolution entière $S = 2\pi ac$, et pour celle du volume : $V = 2\pi ab^2$, b^2 représentant l'aire connue du polygone.

II.

Si la figure était une circonférence de cercle, dont le rayon CM (fig. 79) fût égal à b, et la distance CP du

centre à l'axe de rotation, égale à a, on aurait pour la surface décrite $4\pi^2ab$, et pour le solide $2\pi^2ab^2$.

Si la distance CP se confond avec le rayon CM, c'est-à-dire, si la rotation du cercle se fait autour de sa tangente, alors $a = b$, la première expression devient $4\pi^2a^2$, et la seconde $2\pi^2a^3$.

III.

Si on suppose le rectangle CABD (fig. 80) tourner autour du côté AB, en désignant par h sa hauteur et par r sa base, on trouvera pour la surface convexe du cylindre engendré :

$$S = 2\pi rh, \text{ et pour son volume : } V = \pi r^2 h,$$

ce qui s'accorde avec ce qu'on a vu en géométrie.

IV.

Si au lieu d'un parallélogramme rectangle, on suppose un triangle rectangle tournant autour de AB (fig. 81), il formera un cône droit dont la hauteur $AB = h$, le rayon de la base $AE = r$. On aura pour sa surface $S = \pi r BE$; c'est-à-dire que la surface convexe du cône droit est égale au contour de la base multiplié par la moitié du côté BE, et sa solidité $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$.

V.

Supposons l'arc de cercle MOM' tournant autour de son diamètre AB (fig. 82). On sait que l'arc MOM' engendrera une zône, qui aura pour hauteur MM', et pour surface $2\pi r.MM'$, r étant le rayon du cercle. On aura donc $2\pi Y.MOM' = 2\pi r.MM'$, ce qui donne la proportion trouvée ci-dessus :

$$MOM' : MM' :: r : Y.$$

De la Chaînette.

On appelle *chaînette* ou *caténaire*, la courbe que forme une corde pesante parfaitement flexible attachée par ses extrémités à deux points immobiles.

Quelle que soit la nature de cette courbe, il est évident que si les points de suspension M, N étaient dans une ligne horizontale, la courbe, à partir du point le plus bas, aurait deux branches parfaitement égales et symétriques de part et d'autre de la verticale AB (fig. 83). Nous prendrons cette verticale pour l'axe des abscisses, et le point A pour l'origine des coordonnées. D'après ce que nous venons de voir, l'équilibre permet de prendre sur le cours de la courbe, pour points fixes deux points quelconques, les points S et A, par exemple; la partie AS restera en équilibre. Soit donc $AP = x$, $PS = y$, $AS = z$; et représentons par pdz la force verticale qui agit sur le point S, et par a la tension ou la puissance qui agit suivant l'horizontale TA; nous avons vu qu'on pourrait sans troubler l'équilibre, supposer appliquée au point de concours T des deux tangentes AT, ST la résultante $\int pdz$, que je représente par TV, des forces verticales qui agissent sur chacun des points de la corde AS. On aura donc

$$a : \int pdz :: dy : dx;$$

d'où $\quad adx = dy\int pdz, \quad$ ou $\quad adx = Pdy;$

P désignant la somme de toutes les puissances verticales, ou l'intégrale de pdz. Nous supposons ici que les puissances verticales varient suivant une même loi relative à la longueur de l'arc z, de chaque côté de l'axe des abscisses. En vertu des principes du calcul différentiel;

nous aurons

$$dz = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{dy^2 + \frac{P^2}{a^2} dy^2} = \frac{dy}{a} \sqrt{a^2 + P^2}.$$

Donc

$$1^o. \ dy = \frac{adz}{\sqrt{a^2 + P^2}}; \quad 2^o. \ dx = \frac{P.dz}{\sqrt{a^2 + P^2}}.$$

Ces deux équations donnent la relation qui existe entre les coordonnées et la longueur de la courbe à partir du point A.

Pour faire une application de ces formules au cas le plus simple, qui est celui que nous avons en vue, nous supposerons la corde d'une grosseur et d'un poids uniforme dans toute sa longueur. Ainsi, en fesant $p = 1$, nous aurons $pdz = dz$; et $P = \int pdz = z$. Par conséquent la valeur de dx devient

$$dx = \frac{zdz}{\sqrt{a^2 + z^2}},$$

dont l'intégrale donne $x + C = \sqrt{a^2 + z^2}$. Mais lorsque $x = 0$, $z = 0$; donc $C = a$. Donc

$$x + a = \sqrt{a^2 + z^2}.$$

Par conséquent $z = \sqrt{x^2 + 2ax}$, et en différentiant $dz = \frac{(x + a)}{\sqrt{x^2 + 2ax}} . dx$. La valeur de dy devient donc en fesant les substitutions

$$dy = \frac{adx}{\sqrt{x^2 + 2ax}}.$$

Pour intégrer cette dernière expression, je fais d'abord

$x+a=t$; ce qui donne $dx=dt$; $x^2+2ax=t^2-a^2$, ou $\sqrt{x^2+2ax}=\sqrt{t^2-a^2}$. Donc

$$dy=\frac{adt}{\sqrt{t^2-a^2}}.$$

Je fais ensuite $\sqrt{t^2-a^2}=u-t$; ce qui donne..

$$t=\frac{u^2+a^2}{2u}=\frac{u}{2}+\frac{a^2}{2u};$$

et en différentiant,

$$dt=\frac{du}{2}-\frac{a^2du}{2u^2}=\frac{u^2-a^2}{2u^2}.du.$$

De plus, $\sqrt{t^2-a^2}$, ou $u-t=\frac{u^2-a^2}{2u}$. Donc

$$\frac{adt}{\sqrt{t^2-a^2}}=\frac{adu.(u^2-a^2)}{2u^2.\frac{u^2-a^2}{2u}}=\frac{adu}{u}.$$

Donc

$$\begin{aligned}y=C+alu&=C+al(t+\sqrt{t^2-a^2})\\&=C+al(x+a+\sqrt{x^2+2ax}).\end{aligned}$$

Mais lorsque $y=0$, $x=0$; donc $C=-ala$. On aura donc pour l'équation de la chaînette

$$y=a.l\frac{x+a+\sqrt{x^2+2ax}}{a}.$$

ou, en se rappelant que $x+a=\sqrt{a^2+z^2}$, et..... $\sqrt{x^2+2ax}=z$,

$$y=a.l\frac{z+\sqrt{a^2+z^2}}{a}.$$

La première valeur de y donne la relation entre les ordonnées de la courbe; et la seconde, la relation entre les ordonnées et la longueur des arcs. En y ajoutant l'équation

$$x+a=\sqrt{a^2+z^2};$$

on aura aussi la relation entre les abscisses et les arcs de la courbe.

L'équation

$$y=al\,\frac{x+a+\sqrt{x^2+2ax}}{a}$$

nous apprend que du côté des x négatives, les y sont imaginaires. Ainsi la courbe n'a point de branches au-dessous du point A; mais du côté des x positives, son étendue est indéfinie, puisque les abscisses x augmentent en même tems que les ordonnées y.

Si on voulait connaître la tension T de la courbe au point S, on la déterminerait par la proportion

$$T : z :: 1 : \frac{dx}{dz}.$$

Elle est donc égale à $z.\frac{dz}{dx}$. Ainsi

$$T=\sqrt{a^2+z^2}=x+a.$$

Remarquons en passant que l'équation $z=\sqrt{x^2+2ax}$ fait voir que la chaînette, quoique du genre des courbes transcendantes, est rectifiable.

Quand on connaît les points de suspension de la corde avec sa longueur, il faut, pour décrire la courbe qu'elle forme, connaître la position du sommet A (fig. 84), et la

la valeur a de la tension horizontale. Soient M et N les points de suspension donnés de position. Je mène par le point M l'horizontale MC, et par le point N la verticale $CN = BP$; ces droites seront connues. Je représente par D la première, et par e la seconde. La longueur de la corde, qu'on suppose aussi connue, sera L. Cela posé, en faisant $AN = z$, $AM = z'$, $PN = y$, $BM = y'$, on aura

$$z = \sqrt{2ax + x^2}; \quad z' = \sqrt{2a(x+e) + (x+e)^2};$$

donc $z + z'$ ou

$$L = \sqrt{2ax + x^2} + \sqrt{2a(x+e) + (x+e)^2}. \quad (a)$$

On aura aussi

$$y = al\,\frac{x + a + \sqrt{x^2 + 2ax}}{a},$$

$$y' = al\,\frac{x + a + e + \sqrt{(x+e)^2 + 2a(x+e)}}{a};$$

donc $y + y'$ ou

$$D = a.l\frac{(x + a + \sqrt{x^2 + 2ax})}{a}.\frac{(x + a + e + \sqrt{(x+e)^2 + 2a(x+e)})}{a}. \quad (b)$$

Si les points de suspension M et N étaient du même côté de la verticale, ce seraient alors $z' - z$ et $y' - y$, qui seraient connues.

Au moyen des équations (a) et (b), on tirera les valeurs de a et de x; on aura donc l'abscisse qui répond au point de suspension le plus bas, et l'équation

de la courbe donnera la valeur de l'ordonnée correspondante. Ainsi le sommet de la courbe sera par là déterminé. Rien n'empêche à présent de la décrire, mais il est aisé de voir qu'on ne pourra obtenir qu'un résultat approché, à cause des quantités logarithmiques qui entrent dans l'équation de la courbe.

Il suit de ce qui précède, que si on a une suite de petites sphères pesantes, dont les centres soient successivement liés entr'eux, elles se disposeront pour l'équilibre de manière à former la courbe dont nous venons de donner l'équation. Mais si on renverse cette courbe, l'équilibre ne sera point troublé, pourvu qu'elle soit placée dans un plan vertical, et que les sphères restent attachées les unes aux autres. Car si plusieurs puissances se font équilibre entr'elles, l'équilibre subsistera toujours, si, sans changer les valeurs respectives des puissances, on ne fait que donner à chacune une direction entièrement opposée. Donc l'espèce de voûte que formera cette suite de sphères pesantes et contiguës, devra avoir pour l'équilibre la forme de la chaînette.

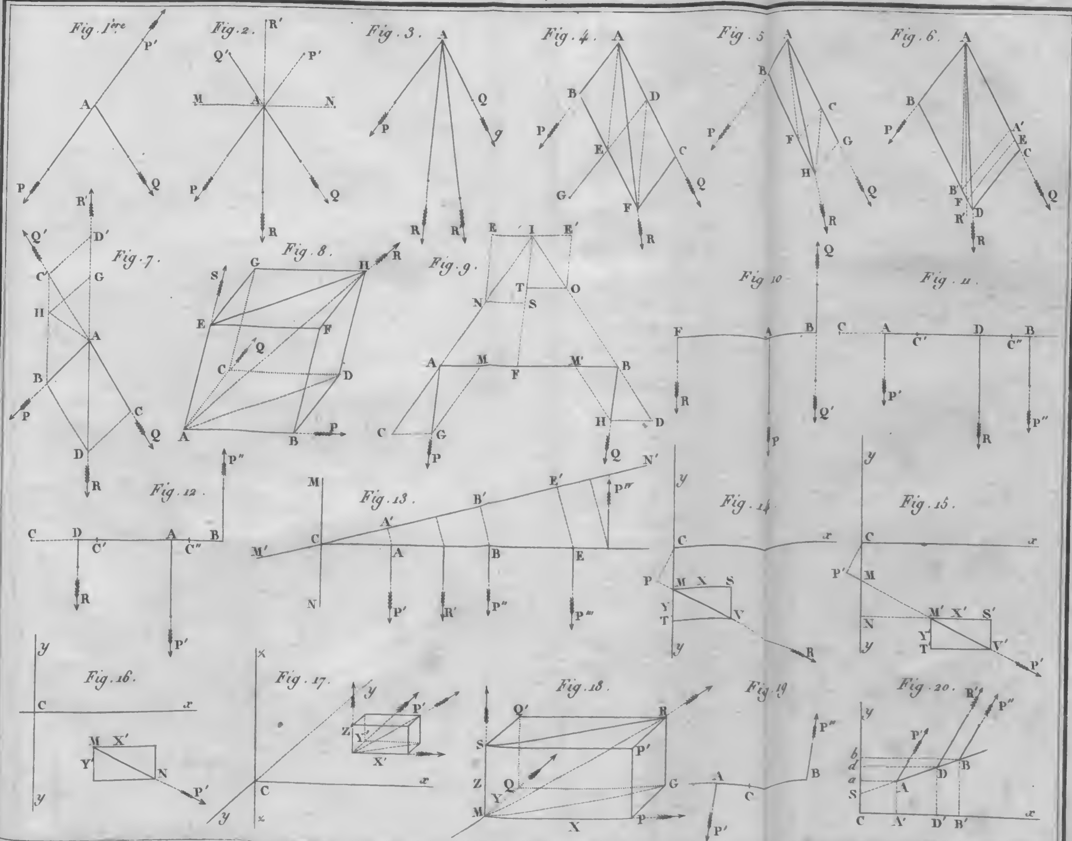
Remarque. Dans le polygone funiculaire que nous avons considéré (57), nous avons fait abstraction de la pesanteur des cordes qui joignent deux nœuds consécutifs, et nous les avons supposées en même tems parfaitement flexibles; mais si, dans cette dernière hypothèse, on veut avoir égard à leur pesanteur, il est clair qu'ils ne seront plus tendus en ligne droite; ils formeront autant de chaînettes particulières, et les tensions des extrémités des cordons se détermineront d'après les prin-

cipes que nous venons d'exposer. Si au contraire les cordons étaient entièrement inflexibles, on supposerait leur masse réunie à leur centre de gravité. On décomposerait ensuite le poids de chacun en deux forces verticales appliquées aux nœuds qu'il unit. Ce cas rentrerait dans celui où plusieurs forces seraient appliquées à un même nœud.

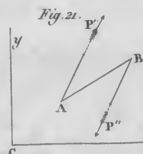
FIN.

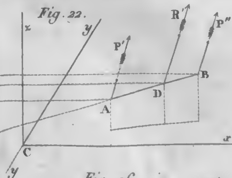
ERRATA.

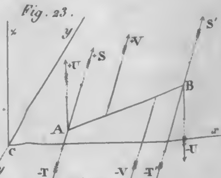
Pag.	Lig.	*Mettez*
24	23	2PQ. cos (P, Q)
33	18	2° $x =$
56	10 — 12	en regardant MR comme représentant la résultante.
71	9	$\frac{X}{R} \cdot y$
74	18	R′
80	2	(fig. 23)
88	7	au plan des y etc.
148	11	$t'' = \frac{r''}{s''} \cdot P$
153	15	*apb.*

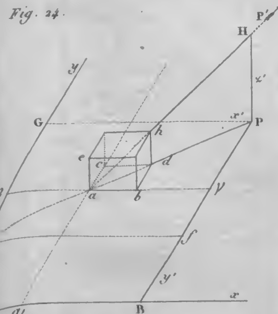


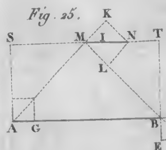
Girard del. Adam sculp.


Fig. 21.
y
P′
B
A
P″
C
x


Fig. 22.
z
y
R′
P″
P′
B′
D′
A′
B
D
A
M
C
x
y


Fig. 23.
z
y
S′
U
S
V
B
A
C
x
-U
y
-T
-V
-T′


Fig. 24.
P′
H
z
y
z′
G
x′
P
h
e
c
d
β
a
b
γ
i
δ
p′
r′
y′
C
α
B
x
y


Fig. 25.
K
S
M
I
N
T
L
A
G
B
C
E
D

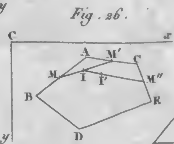
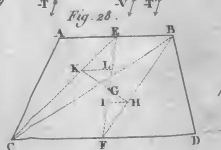
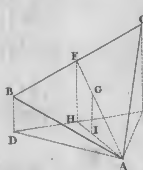
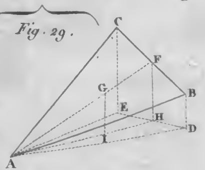
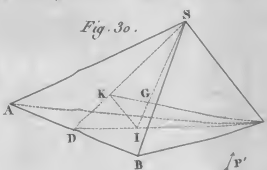

Fig. 26.
C
x
A
M′
C
M
I
I′
M″
B
E
D
y

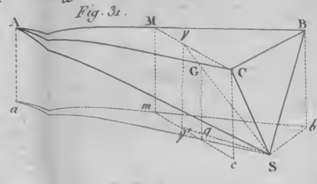

Fig. 27.
A
E
G
B
D
C

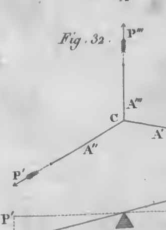

Fig. 28.
A
E
B
K
L
G
I
H
C
F
D

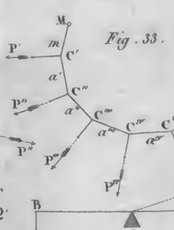

C
F
B
G
H
E
I
D
A

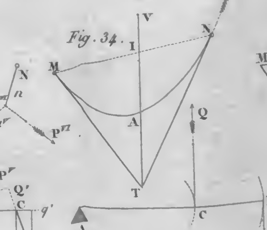

Fig. 29.
C
F
G
B
E
H
I
D
A

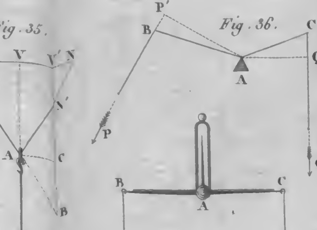

Fig. 30.
S
K
G
A
C
D
I
B

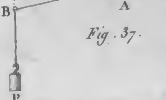

Fig. 31.
A
M
B
γ
G
C
a
m
b
p′
q
c
S

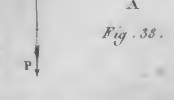

Fig. 32.
P‴
A‴
C
A′
A″
P″
P′

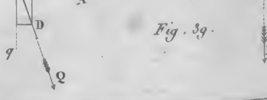

M
Fig. 33.
P′
m
C′
a′
C″
P″
a″
C‴
P‴
a‴
C^IV
P^IV
a^IV
C^V
P^V
a^V
C^VI
n
N
P^VI

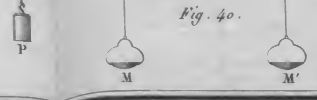

P′
V
Fig. 34.
N
I
M
A
Q
T


Fig. 35.
M
V
V′
N
N′
A
C
B
P
P′
B
Fig. 36.
C
A
Q′
P
Q

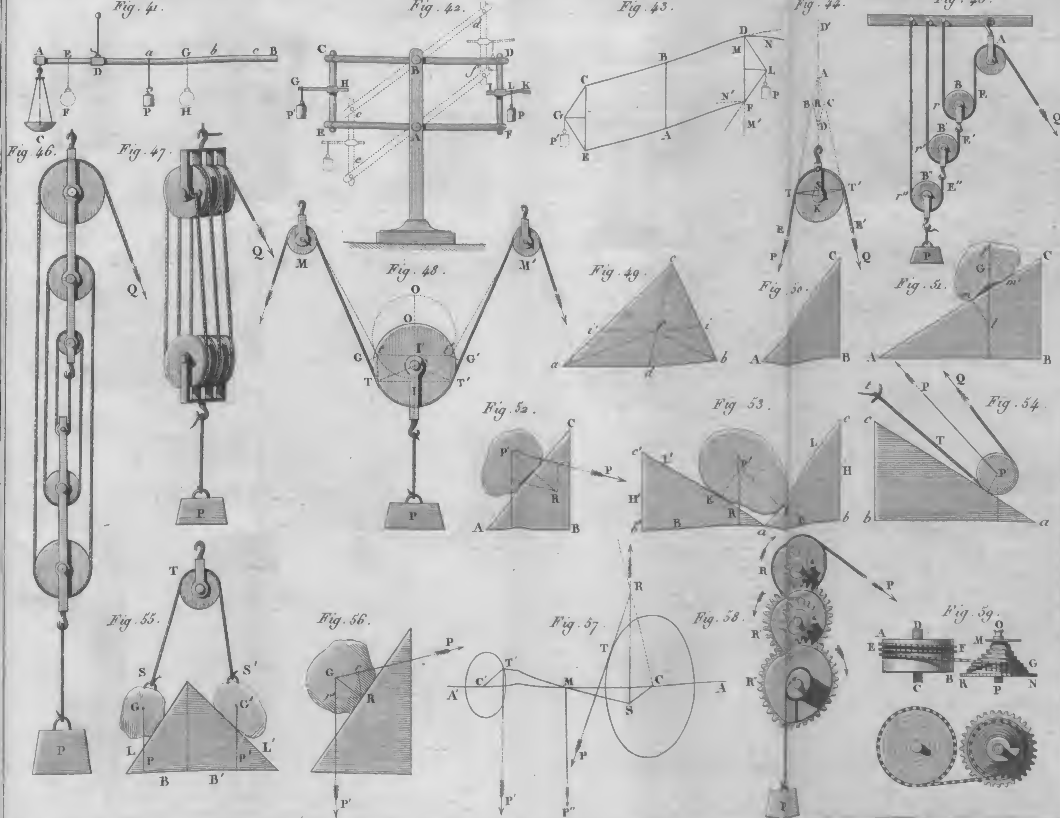

C
P′
A
Q′
B
Fig. 37.
P
Q


Q′
B
A
C
q′
D
Fig. 38.
P
q
Q


A
C
B
Fig. 39.
P

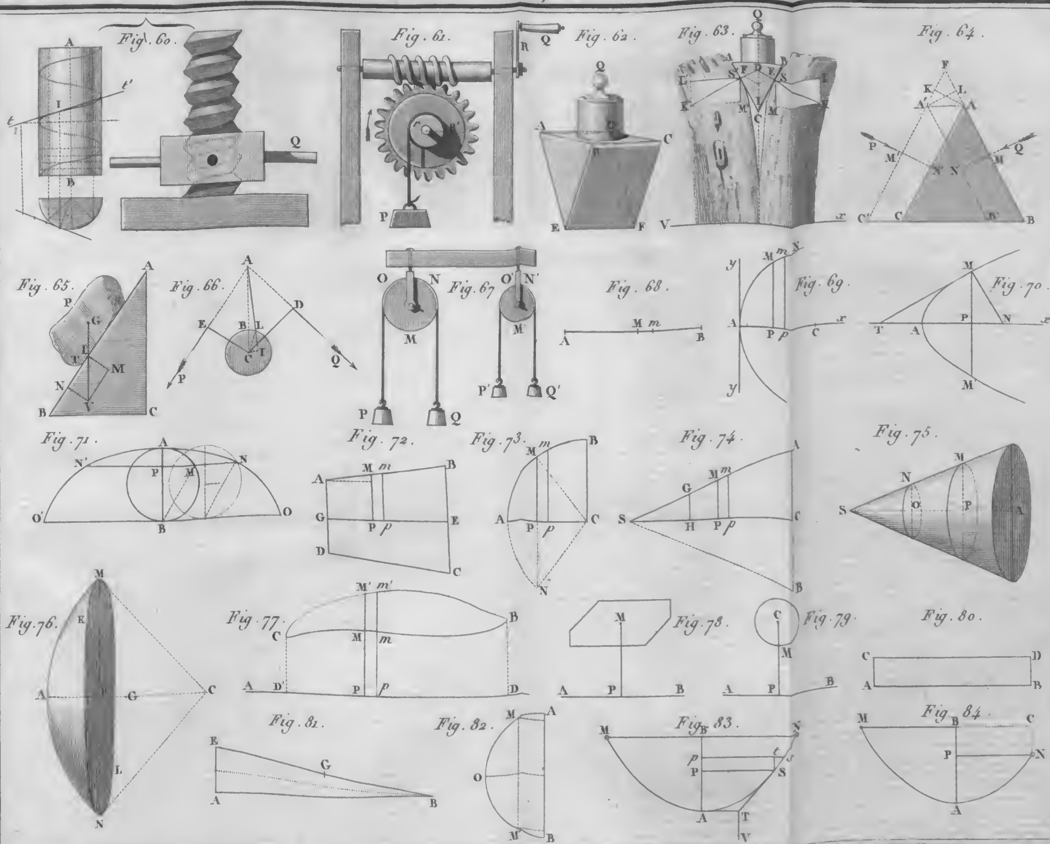

B
C
A
Fig. 40.
M
M′





Girard del. Adam sculp





Girard del. Adam sculp



